

# CONFÉRENCE DE CONSENSUS

## L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES AU PRIMAIRE

➔ L'ACQUISITION DES NOMBRES ENTIERS  
DE LA DESCRIPTION DE SON ÉVOLUTION  
AUX INTERVENTIONS

**LES 5 ET 6 DÉCEMBRE 2023**

Centre africain d'études supérieures  
en gestion (Cesag)  
Dakar, Sénégal

En collaboration avec



Avec le soutien de



# L'ACQUISITION DES NOMBRES ENTIERS

## DE LA DESCRIPTION DE SON ÉVOLUTION AUX INTERVENTIONS

**Michel FAYOL**

Université Clermont Auvergne

**Juliette FANJAT**

Centre national d'étude des systèmes scolaires (Cnesco)

**Mai 2024**



## MENTIONS LÉGALES

Pour citer ce document, merci d'utiliser la référence suivante :  
Fayol, M. et Fanjat, J. (2024). *L'acquisition des nombres entiers. De la description de son évolution aux interventions*. Confemen, Cnesco-Cnam.

Ce texte s'inscrit dans une série de rapports publiés par la Conférence des ministres de l'Éducation des États et gouvernements de la Francophonie (Confemen) et le Centre national d'étude des systèmes scolaires (Cnesco) sur la thématique :  
**Enseignement et apprentissage des mathématiques au primaire.**

Les opinions et arguments exprimés n'engagent que les auteurs du rapport.

Remerciements : les auteurs remercient Jean-François Chesné pour sa précieuse collaboration et pour sa contribution à la rédaction du glossaire.

Disponible sur le site de la Confemen :  
[www.confemen.org](http://www.confemen.org)

Conférence des ministres de l'Éducation  
des États et gouvernements de la  
Francophonie  
BP 3220, Dakar (Sénégal)

Contact : [confemen@confemen.org](mailto:confemen@confemen.org) –  
+221 33 859 29 79

Disponible sur le site du Cnesco :  
[www.cnesco.fr](http://www.cnesco.fr)

Centre national d'étude des systèmes  
scolaires  
41 rue Gay Lussac, 75005 Paris (France)

Contact : [cnesco@lecnam.net](mailto:cnesco@lecnam.net) –  
(+33) 06 98 51 82 75

## TABLE DES MATIÈRES

<b>PRÉAMBULE .....</b>	<b>5</b>
<b>GLOSSAIRE .....</b>	<b>6</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>11</b>
<b>I. LES APPRENTISSAGES DES TRAITEMENTS NON SYMBOLIQUES DES QUANTITÉS ET GRANDEURS.....</b>	<b>12</b>
<b>II. L'APPRENTISSAGE DU TRAITEMENT SYMBOLIQUE DES QUANTITÉS.....</b>	<b>15</b>
A. Les codes analogiques conventionnels .....	16
B. L'apprentissage des relations entre symboles – verbaux ou écrits – et quantités représentées.....	18
<b>III. DU CODAGE DES QUANTITÉS À LA RELATION D'ÉQUIVALENCE .....</b>	<b>22</b>
<b>IV. DÉCRIRE, PRÉDIRE, INTERVENIR .....</b>	<b>25</b>
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>31</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>32</b>

## LISTE DES FIGURES

Figure 1. Illustration du dispositif mis en œuvre par Izard <i>et al.</i> (2014).....	13
Figure 2. Composantes du sens du nombre selon Jordan <i>et al.</i> (2022) .....	29

## PRÉAMBULE

Ce bilan des **connaissances scientifiques en psychologie sur l'acquisition des nombres entiers par les enfants** s'inscrit dans une série de textes produits pour la conférence de consensus « Enseignement et apprentissage des mathématiques au primaire » co-organisée par la Conférence des ministres de l'Éducation des États et gouvernements de la Francophonie (Confemen) et le Centre national d'étude des systèmes scolaire (Cnesco).

En amont des questions relatives à l'enseignement des mathématiques, il existe des questions relatives à leur apprentissage. Certaines d'entre elles sont liées au milieu socio-culturel et linguistique dans lequel évoluent les enfants : elles sont explorées dans certaines des notes des experts de la conférence de consensus (voir par exemple Lingani, 2024 ou Kébé, 2024). **D'autres questions relatives à l'apprentissage des mathématiques présentent un caractère universel** ; c'est par exemple le cas de celles portant sur l'acquisition des nombres entiers par les enfants.

La présente contribution a donc pour objectif de présenter une revue de littérature sur cette thématique ; étant donnés les travaux de recherche existants, celle-ci s'appuie quasi-exclusivement sur des études menées dans un contexte occidental.

Un **glossaire** accompagne ce rapport : il définit les principaux concepts mobilisés en psychologie pour comprendre et rendre compte de l'acquisition des nombres entiers par les enfants.

## GLOSSAIRE

### Associativité

On dit qu'une opération  $\star$  est **associative** si pour tous nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ ,

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$$

Par exemple, l'addition  $a + (b + c) = (a + b) + c$  et la multiplication  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$  sont associatives.

> Exemples :

- $2 + 3 + 4 = 5 + 4 = 2 + 7 = 9$
- $2 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 = 2 \times 15 = 30$

> Contre-exemple : la soustraction n'est pas associative :

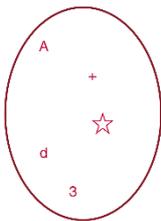
- $5 - (3 - 2) = 5 - 1 = 4$
- $(5 - 3) - 2 = 2 - 2 = 0$

### Approximate Number System (ANS, ou SAN : système approximatif du nombre)

*Des résultats convergents ont amené à considérer que les animaux, les nouveau-nés et les adultes de toutes les cultures (sous réserve qu'on les empêche de dénombrer) [...] disposent d'une représentation mentale analogique des quantités continues ou discrètes : le **SAN** (Fayol, 2022, p. 39 – souligné par l'auteur).*

### Cardinal ; cardinalité

La **cardinalité** d'un ensemble représentant une collection est la mesure de son nombre d'éléments ; le **cardinal** d'un ensemble est son nombre d'éléments.



> Exemple : le cardinal de cet ensemble est 5.

### Chiffres

De la même façon que les lettres permettent d'écrire des mots, les **chiffres** permettent d'écrire des nombres.

> Exemple : le code indo-arabe compte dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

## Code analogique

*[Les **codes analogiques**] partage[nt] un certain nombre de propriétés, souvent perceptives, avec ce qu'ils représentent. [...] La taille de la représentation (le signifiant) est proportionnellement à celle de ce qui est représenté (le signifié). De plus, les variations, accroissement et diminution, affectent l'un dans le même sens que l'autre. Les ajouts et retraits (additions et soustractions) sont donc facilement perceptibles et reproductibles (Fayol, 2022, p. 21 – souligné par l'auteur).*

> Exemples : encoches taillées dans deux tiges de bois parallèles, doigts, bouliers, etc.

## Code symbolique

Les **codes symboliques**, contrairement aux codes analogiques, sont arbitraires : « les signifiants qu'ils emploient n'ont aucune ressemblance avec ce à quoi ils renvoient (les signifiés). Le chiffre 3 /trwa/ n'a aucune relation avec le cardinal trois, sauf d'être le troisième élément de la suite verbale des noms de nombres » (Fayol, 2022, p. 27).

> Exemples : code verbal (noms de nombres), code signé (utilisé par les sourds), code (indo)arabe.

## Commutativité

On dit qu'une opération  $\star$  est **commutative** si pour tous nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ ,

$$a \star b = b \star a$$

Par exemple, l'addition  $a + b = b + a$  et la multiplication  $a \times b = b \times a$  sont commutatives.

> Exemples :

- $2 + 3 = 3 + 2 = 5$
- $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$

> Contre-exemple : la soustraction n'est pas commutative :

- $5 - 2 = 3$
- $2 - 5 = -3$

## Correspondance terme à terme (CTT)

La **correspondance terme à terme** (CTT) est un principe « selon lequel à chaque élément d'un ensemble correspond un et un seul élément d'un autre ensemble, par exemple, les tasses et les soucoupes d'un même service ; par extension chaque élément dénombré d'une collection correspond à un mot-nombre » (van Nieuwenhoven, 1996, p. 297).

## Dénombrement par comptage

Dans le **dénombrement par comptage**, l'enfant doit comprendre que le dernier nom de nombre prononcé désigne le cardinal de la collection.

## Distributivité

Une opération notée multiplicativement ( $\times$ ) est **distributive** par rapport à une opération notée additivement ( $+$ ) si pour tous nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on a  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ .

> Exemple : la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$6 \times 12 = 6 \times (10 + 2) = 6 \times 10 + 6 \times 2 = 60 + 12 = 72$$

## Effet de distance

L'**effet de distance** désigne le fait suivant :

*La comparaison de deux grandeurs ou quantités (taille, durée, brillance, angles, etc.) est d'autant plus facile qu'elles sont éloignées (les tailles d'une souris et d'un éléphant) et difficile qu'elles sont proches (les tailles d'une souris et d'un hamster » (Fayol, 2015, p. 3).*

## Effet de taille

L'**effet de taille** désigne le fait qu'« [à] distance constante, la comparaison de 125 et 126 est plus difficile que celles de 25 et 26 ou encore de 5 et 6 » (Fayol, 2015, p. 3).

## Encodage

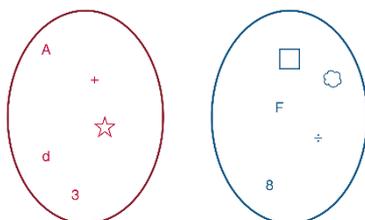
L'**encodage** désigne « le processus par lequel les caractéristiques d'un stimulus vont être transformées en traces mnésiques. [...] Cette opération aboutit à l'inscription de l'information en mémoire mais également à la création de liens entre cette nouvelle information et les informations déjà en mémoire » (Léger, 2016, p. 78).

Les deux autres phases de la mémorisation sont le stockage-consolidation et la récupération (accessibilité et restitution de l'information stockée en mémoire).

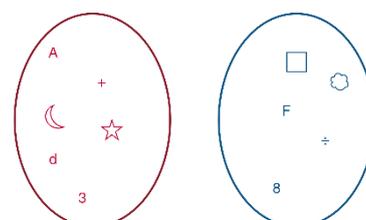
## Équipotence

Deux collections sont dites **équipotentes** si elles ont le même cardinal (*le même nombre d'éléments*).

> NB : l'équipotence est un cas particulier d'équivalence.



L'ensemble rouge et l'ensemble bleu sont équipotents : ils ont le même cardinal (le même nombre d'éléments).



L'ensemble rouge et l'ensemble bleu ne sont pas équipotents : ils n'ont pas le même cardinal (6 éléments pour l'ensemble rouge, 5 éléments pour l'ensemble bleu)

## Équivalence

**L'équivalence** désigne le fait d'être de même valeur quantitative pour des objets (CNRTL, s.d.-a).

> Exemples :

- Deux surfaces de même aire peuvent être dites équivalentes ;
- $3 + 4$  est équivalent à  $2 + 5$  ; on écrit  $3 + 4 = 2 + 5$ .

## Fluence (mathématiques)

En mathématiques, la **fluence** désigne « la capacité à résoudre rapidement et précisément des problèmes arithmétiques (problèmes d'addition et de soustraction jusqu'à 20, problèmes de multiplication et de division à partir de la table de multiplication) » (Gliksman *et al.*, 2022 – traduit par l'auteur).

## Grandeur

Le terme « **grandeur** » renvoie à l'aspect mesurable de quelque chose (CNRTL, s.d.-b).

> Exemple : le volume est une grandeur.

## Inversion de l'addition et de la soustraction

La soustraction est **l'opération inverse** de l'addition : pour tous nombres  $a$  et  $b$ ,

$$a + b - b = a$$

> Exemple :  $2 + 3 - 3 = 2$ .

## Ligne numérique mentale

La psychologie cognitive fait l'hypothèse que les êtres humains se représentent les quantités et grandeurs selon une **ligne numérique mentale**, orientée de gauche à droite (Fayol, 2015).

## Maturation

En psychologie, la **maturation** désigne « l'aspect du développement de l'enfant résultant de l'action des facteurs internes, distincts de l'éducation et du conditionnement » ; « au sens large, la maturation implique tout le développement psychique de l'enfant » (Office québécois de la langue française, 1990).

> Exemple : au cours des premières années de vie, la maturation du système nerveux est à l'origine de la marche (la mise à l'exercice demeure toutefois déterminante quant à son développement) (*ibid.*).

## Nombres entiers naturels

Les **nombres entiers naturels** sont des nombres qui permettent d'exprimer le cardinal d'une collection. Ils peuvent s'écrire comme une suite finie de chiffres (sans virgule).

> Exemples :

### *Nombres entiers naturels*

- 4
- 382,0 (= 382)
- $\frac{6}{2}$  (= 3)

### *Autres nombres*

- - 5 (nombre entier négatif)
- 4,7 (nombre décimal)
- $\frac{1}{3}$  (fraction qu'on ne peut pas écrire comme suite finie de chiffres sans décimale)

## Ordinalité

« **L'ordinalité** fait référence au rang d'un élément dans une série donnée. On s'y réfère verbalement par le biais de nombres ordinaux (par exemple « treizième ») » (Dehaene, 2008 – souligné par l'auteur). Elle peut aussi renvoyer à la comparaison des grandeurs et quantités.

## Principe cardinal (ou principe de cardinalité)

Le **principe cardinal** est un principe selon lequel « le dernier mot-nombre utilisé dans une séquence de comptage représente le nombre d'éléments de l'ensemble compté » (van Nieuwenhoven, 1996, p. 297).

> Exemple : compter les éléments d'un ensemble en partant de 1 jusqu'à 5 permet de savoir que cet ensemble a 5 éléments.

## Quantité

La **quantité** fait référence à une grandeur dénombrable finie.

## Sens du nombre

Dans le cadre de cette contribution, nous retenons la définition donnée par Dehaene (1997, 2010), pour qui le **sens du nombre** renvoie à « l'idée d'un système cognitif dédié à la perception des grandeurs numériques, nous fournissant nos premières intuitions approximatives des nombres » (Viarouge, 2020, p. 165).

## Subitizing (ou subitisation)

Le **subitizing** désigne la « manière d'appréhender spontanément et précisément les petites quantités » (*appréhension immédiate et sans comptage*) ; autrement dit, il s'agit de la « capacité de quantification exacte lorsque la taille des ensembles est limitée à deux ou trois éléments ou lorsque la configuration est organisée selon des arrangements figuratifs familiers (quatre en carré, cinq en quinconce) » (Vilette, 1994, p. 26).

## INTRODUCTION

L'apprentissage élémentaire des mathématiques comme système symbolique (Hiebert, 1988) comporte trois niveaux et/ou moments plus ou moins intriqués au cours de leur évolution dans les sociétés dotées d'un système scolaire (voir pour les effets de l'absence de système de scolarisation O'Shaughnessy *et al.*, 2023).

- Le premier a trait aux **apprentissages préscolaires du traitement non symbolique des quantités et des grandeurs** réalisés en fonction de la **maturation** et des conditions environnementales, physiques et sociales. Il s'effectue souvent en milieu familial, mais de nombreuses cultures se dotent d'une organisation de préscolarisation visant à préparer, voire assurer, certains apprentissages ;
- Le deuxième apprentissage, majeur au plan du nombre, est celui de **l'acquisition des symboles** (et des signes) **et du traitement précis des données** symboliques, verbales et indo-arabes (voire signées) : apprendre à associer avec précision les symboles sociaux aux quantités auxquelles ils correspondent (valeur cardinale), apprendre à les ordonner de manière à ce qu'ils respectent le principe du successeur (valeur ordinale) (Izard *et al.*, 2008 ; Sarnecka & Wright, 2013) ;
- Le troisième apprentissage concerne celui des **combinaisons des signes numériques** (nombres) **et des signes associés aux opérations** ( $=$ ,  $>$ ,  $<$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ). Cela permet de formaliser l'équivalence entre manipuler des quantités et faire des opérations (additionner, soustraire, multiplier et diviser) de sorte que le résultat aboutisse à un nombre ; cela permet également aux enfants de découvrir et apprendre les propriétés de ces combinaisons de signes (numériques et associés aux opérations). Ces propriétés – **commutativité**, **inversion**, etc. – sont fondamentales pour parvenir à une « mathématisation », c'est-à-dire à des traitements algébriques qui combinent les signes ou symboles en suivant des règles, et ceci indépendamment des nombres et de leur association à des référents (Hornung *et al.*, 2022 ; Wu, 2001).

La façon dont les enfants parviennent à atteindre ces trois objectifs reste matière à débat (Hutchison *et al.*, 2020 ; Núñez, 2017 ; O'Shaughnessy *et al.*, 2022). Toutefois, des données existent, qui décrivent avec une bonne précision l'évolution des performances des enfants et leur enchaînement dans le temps. Des recherches portant sur des interventions permettent, au moins dans certains cas, de suggérer voire d'établir des relations de causalité et d'envisager de prédire les éventuels impacts des interventions (Darnon & Fayol, 2020).

La présente contribution se propose de **synthétiser les éléments de la recherche scientifique relatifs à chacune des trois étapes décrites ci-dessus**. Une quatrième et dernière section présente des études visant à **déterminer les composantes déterminantes des apprentissages et les activités pertinentes** pour assurer de bonnes performances mathématiques ultérieures.

## I. LES APPRENTISSAGES DES TRAITEMENTS NON SYMBOLIQUES DES QUANTITÉS ET GRANDEURS

Les données de la recherche suggèrent que les enfants disposent dès la naissance de deux capacités le plus souvent considérées comme différentes leur permettant de traiter les quantités et les grandeurs.

D'une part, **les enfants, dès 2 ou 3 jours après la naissance, sont en mesure de discriminer et de se représenter de petites quantités visuellement**, vraisemblablement sous forme de « fichiers d'objets » (objet 1 ; objet 2 ; objet 3), **et auditivement** (entre 2 et 3 syllabes) (Antell & Keating, 1983). Un peu plus tard, ils réagissent aux ajouts et retraits de petites quantités : 1 objet et encore 1 autre aboutissent à une configuration de 2 objets ; 2 objets avec retrait de 1 donnent 1 objet (Wynn, 1992). Ces toutes petites quantités, de 1 à 3 ou 4, qui correspondent au *subitizing*, ont ceci de particulier que **leur traitement ne fait pas appel au comptage, qu'il est précoce** (il existe avant toute influence culturelle) **et précis**, au point qu'il se rapproche de celui des symboles numériques (Clements *et al.*, 2019 ; Sokolowski *et al.*, 2022). **Il semble universel.**

D'autre part, les nouveau-nés parviennent à discriminer dans des tâches de comparaison des collections ou des surfaces correspondant respectivement à de grandes quantités ou de grandes aires, respectivement. Toutefois, cette discrimination n'est possible que si les « tailles » des collections diffèrent : initialement selon un rapport de 1 à 3 chez les plus jeunes (*par ex.*, de 8 à 24 ou de 12 à 36), puis, ultérieurement, de 1 à 2 (*par ex.*, de 8 à 16), avant de s'affiner progressivement sous l'effet conjoint de la maturation et de l'expérience dans la vie courante puis à l'école – cela jusqu'aux performances adultes (Halberda & Feigenson, 2008 ; Piazza *et al.*, 2013). **Ces traitements**, correspondant à l'ANS (Approximate Number System), **restent toujours approximatifs** et suivent la loi de Weber-Fechner, qui se traduit par des effets de distance (la discrimination de deux collections est d'autant plus facile que la différence – la distance – entre les deux est importante) et des effets de taille. Plus important, il existe dès les premiers temps, aussi bien pour le *subitizing* précoce que pour les traitements ANS, des différences interindividuelles. **Ces différences seraient prédictives des différences ultérieures de performance en mathématiques**, bien que l'importance (*la part de variance*) expliquée reste modeste (Decarli *et al.*, 2023 ; Starr *et al.*, 2013)<sup>1</sup>.

Plusieurs recherches ont essayé d'évaluer dans quelle mesure ces premiers traitements pré-verbaux présentaient des propriétés susceptibles de les rattacher à celles s'appliquant aux futurs nombres entiers, notamment à la cardinalité et à l'ordinalité. La **cardinalité** est une notion abstraite, une propriété des ensembles et non des objets : comprendre la notion de « trois » nécessite de comprendre que tous les ensembles de 3 éléments sont équivalents, ou équipotents, quels que soient leurs contenus (étoiles, arbres, fourmis), leurs formes, leurs couleurs et leurs dispositions spatiales. **Cette abstraction requiert**

---

<sup>1</sup> Pour des raisons liées à l'espace dont nous disposons, nous n'évoquons pas ici les données relatives au traitement des quantités et grandeurs par les animaux. Pour des synthèses, voir Nieder (2021) et pour les relations aux capacités de nouveau-nés (*infants*), Geary & Van Marle (2016).

**un apprentissage.** Par exemple, Michie (1985) étudie si des enfants de 3, 4 et 5 ans sont en mesure de reconnaître une quantité de 2, 3 ou 4 jetons selon que leurs couleurs ou leurs dispositions spatiales changent (ou en d'autres termes, si l'équivalence du cardinal est indépendante des propriétés concrètes des entités concernées). Les résultats montrent que, jusque vers 4-5 ans, la notion de **cardinal** n'est pas abstraite : elle dépend des caractéristiques des entités mises en relation. Ainsi, deux collections équipotentes ne sont initialement jugées telles que si les éléments qui les composent (billes, escargots, voitures) partagent certaines de leurs caractéristiques (couleurs, positions, tailles, etc.) (Mix, 1999, 2008). **Progressivement, les caractéristiques non pertinentes perdent leur effet et l'abstraction du cardinal s'améliore.** Huang *et al.* (2010) montrent de plus que l'apprentissage, par exemple de 3 par des enfants maîtrisant 2, n'est possible que si les entités manipulées sont les mêmes alors qu'un peu plus tard, chez des enfants maîtrisant 3, l'apprentissage de 4 tolère de plus fortes variations des exemplaires. Il faut attendre l'accès au « **principe cardinal** » (voir plus loin) pour que la plupart des propriétés concrètes perdent de leur importance dans la détermination du cardinal.

Izard *et al.* (2014) ont exploré le rôle potentiel que pourrait jouer la **correspondance terme à terme** (CTT) comme fondement possible de la cardinalité chez des enfants de moins de 3 ans ne comprenant pas la signification des nombres au-delà de 4, et donc ne disposant pas du principe d'égalité exacte. Ces enfants ont été soumis à une épreuve de discrimination de quantités proches (5 et 6). Le dispositif consistait en un « arbre » duquel dépassaient des « branches » ; à l'extrémité de ces celles-ci étaient placées des marionnettes (au plus une par branche) de sorte qu'il y avait moins de marionnettes que de branches. Les marionnettes étaient tantôt éveillées (visibles), tantôt endormies (dissimulées dans une boîte dans laquelle elles devaient être cherchées).

**Figure 1. Illustration du dispositif mis en œuvre par Izard *et al.* (2014)**



Source : Izard *et al.*, 2014, p. 33.

Les recherches conduites ont montré que les enfants parvenaient à trouver 5 mais également 6 à condition que les entités ne subissent pas de modification (substitution d'une marionnette par une autre) ; les enfants ne parvenaient toutefois pas à trouver 11. Ainsi, **la CTT était mobilisable mais seulement jusqu'à un certain point ; elle ne constituait pas une procédure abstraite généralisable.**

### **Ce qu'il faut retenir (1)**

En résumé, les performances préverbaux des enfants font bien apparaître une **capacité primaire à discriminer, reconnaître voire constituer de petites quantités**. Cependant, cette capacité ne présente pas le caractère abstrait de la cardinalité (Michie, 1985 ; Mix, 2008) : elle ne permet pas de recourir systématiquement à la correspondance terme à terme (Izard *et al.*, 2014), ni de réussir des comparaisons de séries linéaires de jetons au-delà de 2 (et partiellement 3) (Starkey & Cooper, 1995). Elle n'offre pas non plus la possibilité d'ordonner les quantités non symboliques (objets, jetons) au-delà de 3 (Michie, 1985). **C'est la mise en place des codes analogiques puis symboliques qui permettrait la transition vers l'abstraction.**

## II. L'APPRENTISSAGE DU TRAITEMENT SYMBOLIQUE DES QUANTITÉS

**Le traitement symbolique des quantités** (la cardinalité) **se caractérise par sa précision**, qualité que le système approximatif analogique (ANS) ne comporte pas et à laquelle il ne parvient jamais malgré les entraînements (Izard *et al.*, 2008). Il respecte également le **principe dit du successeur** : à chaque ajout d'un élément d'une collection, la dénomination avance de 1 dans la chaîne verbale (ou dans la suite des nombres écrits en chiffres indo-arabes) (Izard *et al.*, 2008). Compte tenu des propriétés de l'ANS, **il paraît peu probable que les traitements symboliques s'enracinent dans les traitements analogiques approximatifs** (De Smedt *et al.*, 2013), même si les entraînements et l'expérience en raffinent la précision chez les adultes (Park & Brannon, 2013) comme chez les enfants (Hyde *et al.*, 2014). Les analyses de données longitudinales mettent d'ailleurs en évidence que les corrélations entre performances aux comparaisons de quantités non symboliques ne prédisent que de manière faible au préscolaire (enfants âgés de 3 à 6 ans) et très faible à l'élémentaire les scores en mathématiques aux épreuves scolaires (Lyons *et al.*, 2014 ; Schneider *et al.*, 2017).

**L'accès aux traitements symboliques apparaît étroitement lié aux signes** (le langage avec les noms de nombres, puis les chiffres arabes), **bien que la relation ne soit pas encore totalement comprise** (Fayol, 2001 ; Mix *et al.*, 2005). Les recherches ayant étudié les associations entre les performances aux épreuves de type ANS (comparaisons de grandes quantités non symboliques) et aux performances arithmétiques ont fait apparaître que cette relation allait initialement des performances non symboliques (NS) vers les performances symboliques (S – *connaissance explicite des nombres et des chiffres arabes notamment*), étayant plutôt la thèse d'une influence des performances NS sur les performances S et d'un impact des performances NS sur les performances mathématiques (M) ultérieures (van Marle *et al.*, 2014 ; Wang *et al.*, 2021). Les performances NS progressent ensuite sous l'influence des progrès des performances S, suggérant une **relation bidirectionnelle entre NS et S** avec une dominance variable de l'une sur l'autre dont nous connaissons mal le déroulement temporel et l'impact des différentes activités impliquées (Fazio *et al.*, 2014 ; pour une synthèse, voir Goffin & Ansari, 2019 et Ouyang *et al.*, 2021). Les données relatives aux enfants présentant des difficultés en mathématiques (MD) confortent plutôt cette conception : la méta-analyse de Schwenk *et al.* (2017) révèle sur 19 études que **les enfants MD présentent des déficits des traitements symboliques plutôt que non-symboliques**, en accord avec les données rapportées par Rousselle & Noël (2007).

**Les enfants savent précocement compter verbalement**, parfois très loin (au moins jusqu'à 10), souvent sous forme d'une litanie (ou chaîne verbale sans réelle distinction des noms de nombres : undeuxtroisquatre... ; Fuson, 1988) **sans pour autant comprendre ce que signifie compter ou à quelle quantité correspond tel ou tel nom de nombre** (Condry & Spelke, 2008). Ils assignent peu à peu une signification de plus en plus sophistiquée aux noms de nombres, en mettant ces derniers en relation avec des entités discrètes, des quantifications. Cette signification est établie dans toutes les langues du monde pour 1, 2, et moins clairement 3 (parfois assimilé à « beaucoup »). Son installation varie selon les langues, par exemple en fonction de la présence d'une opposition entre singulier et pluriel ou de difficultés spécifiques (Hodent *et al.*, 2005). Les enfants en arrivent

à saisir la logique du comptage et à une compréhension intuitive de la fonction de successeur. **Cette évolution s'avère lente et relativement complexe pour aller de 1 jusqu'à 10** dans toutes les langues ; au-delà de dix, les différences de vitesse d'acquisition deviennent très importantes selon les caractéristiques des systèmes verbaux de numération (Miller *et al.*, 1995 ; Miller & Paredes, 1996). Elle se traduit également par **d'importantes différences interindividuelles associées**.

Toutefois, l'apprentissage des traitements numériques précis ne se réduit pas à celui des associations entre noms de nombres (ou chiffres indo-arabes) et quantités. L'environnement social et physique comporte également des formes conventionnelles fréquemment utilisées, tels les dés, les dominos, les cartes à jouer, voire les abaques dans les cultures asiatiques (Frank & Barner, 2012). Certaines de ces formes ont ceci de particulier qu'elles représentent des quantités limitées (souvent de 1 à 6, parfois 8, voire 12) par des configurations et agencements particuliers qui en facilitent le traitement visuel, la reconnaissance rapide (Mandler & Shebo, 1982). Ceci vaut également, au moins partiellement, pour les configurations de doigts, encore que le caractère conventionnel de celles-ci soit moins clairement attesté (Guedin *et al.*, 2018). **Cette représentation externe** (signifiant) **est qualifiée d'analogique** car elle conserve avec les quantités représentées (signifié) une ressemblance relative facilitant les traitements des quantités correspondantes ; **cela n'est pas le cas des représentations symboliques**, abstraites et arbitraires, des noms de nombres et des chiffres indo-arabes. Les travaux conduits au cours des dernières décennies ont étudié les usages et impacts potentiels de ces formes conventionnelles.

## A. Les codes analogiques conventionnels

Le traitement des petites quantités relevant du *subitizing* est limité mais précis.

Comme déjà souligné, **ces quantités pourraient donc constituer une base analogique plausible pour l'acquisition des premières associations entre des symboles numériques verbaux ou indo-arabes et les quantités correspondantes** (Fayol & Seron, 2005 ; Hutchison *et al.*, 2020) et pour l'apprentissage des propriétés de base du nombre : le principe cardinal, le principe du successeur (ajouter un élément à une quantité correspond à avancer de un dans la séquence des noms de nombres), la cardinalité, voire l'ordinalité (Clements *et al.*, 2019 ; Izard *et al.*, 2014 ; Sarnecka *et al.*, 2015 ; Schneider *et al.*, 2021a ; Schneider *et al.*, 2021b).

Plusieurs données de la littérature évoquent cette possibilité en s'appuyant sur des résultats issus de performances d'enfants en difficulté, sur des études longitudinales mettant en évidence des corrélations, voire sur des interventions. De manière sommaire, **elles rapportent l'existence de relations – faibles mais significatives – entre les traitements précoces portant sur des configurations conventionnelles analogiques** (les dés, les dominos, les configurations de doigts) **de 1 à 3 ou 4 éléments et des performances arithmétiques ultérieures à des épreuves symboliques à plusieurs mois ou années d'intervalle** (par exemple de résolution d'opérations) (Halberda *et al.*, 2008 ; Mazzocco *et al.*, 2011 ; Xenidou-Dervou *et al.*, 2017). Ces configurations symboliques mais analogiques pourraient, du fait des ressemblances qu'elles conservent avec les quantités représentées, constituer des intermédiaires

supportant et favorisant une transition entre les traitements précoces et les traitements symboliques abstraits (noms de nombres ou chiffres indo-arabes) précis, bases de la numération et de l'arithmétique. Cette thèse a été défendue par plusieurs chercheurs estimant que le *subitizing* mis en évidence chez des enfants très jeunes, entre 2 et 4 ans (Starkey & Cooper, 1995 ; von Glasersfeld, 1982) pourrait constituer une base pour l'apprentissage du nombre (Clements *et al.*, 2019 ; Le Corre & Carey, 2007 ; Vilette, 1994). Ainsi, selon Klahr et Wallace (1976), les épisodes de comptage acquièrent leur signification sémantique par la mise en relation avec les associations aux quantités traitées par le *subitizing* : le dernier mot du comptage correspond à la dénomination associée, elle sans comptage, au *subitizing*.

Les configurations conventionnelles telles que celles des dés ou des dominos s'étendent sur des quantités limitées (entre 1 et 6) et se caractérisent par des dispositions spatiales privilégiées (Mandler & Shebo, 1982). Elles sont par ailleurs souvent disponibles dans l'environnement (jeux de plateau). La conjonction de leurs propriétés visuo-spatiales et de leur fréquence d'utilisation contribue à faciliter leur mémorisation et leur traitement en reconnaissance. Les configurations de doigts, par exemple de 1 à 5, correspondant à une seule main, au sein d'une culture donnée, présentent également un caractère conventionnel visuo-spatial à la fois pour la monstration (montrer 3 doigts pour commander 3 glaces) et pour le dénombrement (en France, lever successivement le pouce, l'index et le majeur de la main droite) (Guedin *et al.*, 2018 ; Sato & Lalain, 2008). À cette propriété s'en ajoute une autre, sensori-motrice (*embodied*) permettant à celui qui mobilise ses doigts pour montrer ou compter de ne pas seulement voir mais aussi de ressentir en les activant les mouvements des doigts (Sixtus *et al.*, 2023 ; Di Luca & Pesenti, 2011). On connaît mal l'utilisation des doigts dans l'environnement familial et même scolaire (mais voir Poletti *et al.*, 2022) ; il est donc difficile d'estimer la fréquence avec laquelle les enfants sont amenés à mobiliser leurs doigts ou à observer les adultes et autres enfants le faire. Une importante question a trait aux possibilités que les configurations visuo-spatiales correspondant aux dés et aux dominos ou les configurations visuospatiales et sensori-motrices associées à l'usage des doigts contribuent à l'installation des premières connaissances des symboles numériques, ici les chiffres arabes allant de 1 à 5 (Andres *et al.*, 2008 ; Fayol & Seron, 2005).

Benoit *et al.* (2004, 2013) ont étudié l'évolution des performances d'enfants de 3 à 5 ans à des épreuves simples de mise en relation de configurations canoniques de dés de petites (de 1 à 3) ou grandes (de 4 à 6) quantités avec les noms et les chiffres arabes correspondant aux nombres. Ils ont rapporté que le *subitizing* est plus précoce que le dénombrement, que le traitement des petites quantités (de 1 à 3) précède celui des plus grandes (de 4 à 6), et que l'amélioration des performances évolue de scores très faibles à 3 ans à une réussite complète à 5 ans. **Ces données suggèrent que le *subitizing* des petites quantités pourrait permettre aux enfants d'associer de premières dénominations symboliques distinctives (mots de nombres ou chiffres) aux petites quantités présentées selon des formes visuo-spatiales conventionnelles. Il leur permettrait aussi de comprendre les relations entre le comptage et l'utilisation du principe cardinal associant le dernier nom de nombre énoncé (symbole verbal) lors du dénombrement au cardinal l'ensemble dénombré** (Gelman & Gallistel, 1978). Cette possibilité est d'autant plus importante que, contrairement à ce qui caractérise les traitements associés à l'ANS, les petites quantités favorisent des traitements précis

permettant de discriminer 1 de 2 et 2 de 3, voire au-delà jusqu'à 4 ou 5 et facilitent la mise en évidence du principe du successeur : ajouter un à une quantité dénommée « deux » (*versus* codée 2) conduit à la quantité dénommée « trois » (*versus* codée 3).

En vue d'établir une éventuelle relation entre le *subitizing* et l'apprentissage des premières étapes de la numération symbolique, Gray et Reeves (2014) rapportent que la dénomination de petites quantités (de 1 à 5) chez des enfants de 4 ans (entre 42 et 52 mois) prédit partiellement, en complément de la mémoire de travail, la résolution d'additions et de soustractions simples. Paliwal et Baroody (2020) ont entraîné au *subitizing* portant sur des configurations de diverses entités ayant différentes propriétés (par ex. poissons, jetons, etc.) des enfants de 2 à 4 ans et évalué dans quelle mesure l'évolution de leurs performances en reconnaissance de ces configurations aboutissait à la compréhension du principe cardinal. **Seuls les enfants parvenant au *subitizing* de 4 comprenaient à quoi sert le comptage et le statut du dernier nom de nombre lors du dénombrement, au moins jusqu'à 4** (Le Corre & Carey, 2007).

L'une des questions les plus importantes a trait à l'éventuel rôle que pourraient jouer les configurations conventionnelles sur l'apprentissage des systèmes symboliques abstraits. Des hypothèses précises ont été émises, notamment par Fayol & Seron (2005), selon lesquelles les doigts et leurs propriétés sensorielles et motrices pourraient constituer la base des apprentissages symboliques ultérieurs. Une première série de travaux (Fayol *et al.*, en préparation) met en évidence que les comparaisons de paires de configurations de dés, de doigts et de paires de chiffres varient quant à leur vitesse d'exécution – les comparaisons de dés étant initialement les plus rapides – et que les comparaisons de nombres restent longtemps, au moins jusqu'en fin de première année de scolarisation élémentaire (cours préparatoire en France), significativement plus lentes que celles de dés. Même si les analyses statistiques (*path analyses*) font apparaître une influence des performances aux comparaisons de doigts sur l'amélioration des performances aux comparaisons de chiffres, ces dernières demandent beaucoup de temps pour se rapprocher de celles des adultes, ce qui suggère que **l'évocation et l'automatisation de l'activation des quantités de référence par les signes indo-arabes sont relativement tardives**, en accord avec les résultats rapportés par Girelli *et al.* (2000).

## **B. L'apprentissage des relations entre symboles – verbaux ou écrits – et quantités représentées**

Les études portant sur l'apprentissage des premières relations entre noms de nombres et quantités recourent à deux procédures (O'Rear *et al.*, 2024) :

- La première consiste à présenter aux enfants des paires de cartes comportant des quantités d'entités diverses (étoiles, billes, escargots) contrastées, par exemple \*\* et \*\*\*\*, et d'énoncer un nom de nombre (ou de montrer un chiffre), par exemple 4. L'enfant doit montrer la carte correspondante. Ce dispositif permet de contrôler la proximité des quantités (dit effet de distance : entre 3 et 4 la distance est de 1 ; entre 3 et 5 elle est de 2) mais aussi la connaissance préalable des enfants. Ainsi, les cartes peuvent comporter des quantités correspondant à ce que savent les enfants ou des quantités allant au-delà de ces connaissances, voire un mélange des deux (Mix, 1999) ;

- La seconde, généralement considérée comme la plus fiable, propose aux enfants de donner une quantité énoncée verbalement (« donne 4 ») à partir d'entités diverses mises à disposition des enfants (jetons, jouets divers) (Le Corre, 2014). Baroody *et al.* (2023) ont comparé les performances d'enfants de 3 ans et 7 mois confrontés à des reconnaissances (dire combien) ou à des productions (donner  $n$ ) des quantités 1 (\*), 2 (\*\*) et 3 (\*\*\*) à partir d'objets divers (par exemple, « donne-moi trois petits cochons »). Les performances sont meilleures avec 1 et 2 qu'avec 3 (voir déjà Starkey & Cooper, 1995) ; cependant, pour 3, « dire combien » (3) précède « donne 3 », ce qui peut conduire à surestimer la compréhension des enfants de cette quantité. La question de l'équivalence des deux modalités d'évaluation reste posée : Mou *et al.* (2021) trouvent une forte corrélation ( $r = 0,77$ ) entre les deux épreuves, proche des corrélations issues des autres recherches. Marchand *et al.* (2022) rapportent que la fiabilité est excellente pour 1 et 2 mais beaucoup moins pour 3, 4 et 5. Ainsi, les enfants apprennent les nombres en suivant l'ordre 1, 2, 3, et 4. Ils n'attribuent jamais les noms de nombres qu'ils connaissent à d'autres quantités (Sarnecka & Lee, 2009).

Les chercheurs utilisent majoritairement l'épreuve « Donne  $n$  » pour catégoriser les enfants en fonction de leur niveau de performance : ils distinguent ainsi ceux qui sont « ne sachant rien » (*non-knowers*, qui donnent une poignée d'objets sans idée de quantité, par devinement), les « sachant un » (*one-knowers*, qui donnent un sans erreur), les « sachant deux » (*two-knowers*, qui donnent 1 quand 1 est demandé, 2 quand c'est 2, mais ne savent plus ensuite), et ainsi de suite pour les « sachant trois » puis « sachant quatre » (*three-knowers* et *four-knowers*). Au-delà, **les enfants parviendraient au principe cardinal** à l'épreuve de Gelman et Gallistel (1978)<sup>2</sup>, ils sont dits « connaisseurs du principe cardinal » (*cardinal principle knower* ; Sarnecka & Carey, 2008) : lors d'un dénombrement par comptage, le dernier nom de nombre émis correspond au cardinal de la collection<sup>3</sup>. **Cet accès au principe cardinal impulserait l'apprentissage des associations entre quantités et noms de nombres** (Geary & van Marle, 2018) **et leur permettrait de généraliser aux nombres suivants**, sans que cette extension s'applique nécessairement d'emblée à tous les nombres.

L'acquisition de la signification cardinale des noms de nombres soulève deux problèmes (Fayol, 2001). L'évolution fait apparaître que le passage du code analogique (ANS ou *subitizing*) au code verbal précis constitue une étape difficile. Au cours cette étape, les enfants doivent acquérir, d'une part, la capacité à associer et à évoquer mentalement les quantités à partir des dénominations et cela indépendamment des caractéristiques concrètes des entités qui sont concernées. D'autre part, ils doivent comprendre que l'ordre des noms de nombres code de manière conventionnelle l'accroissement des quantités. Ces deux dimensions soulèvent chacune des problèmes spécifiques qui existent dans toutes les langues et se traduisent par la lenteur de l'acquisition des premiers nombres (de 1 à 10) dans les cultures orientales comme occidentales.

---

<sup>2</sup> Gelman et Gallistel (1978) évaluent le principe cardinal « en posant tout simplement à l'enfant la question "combien y a-t-il de X ?" à la fin de son comptage » (van Nieuwenhoven, 1996, p. 299).

<sup>3</sup> Voir Brissiaud (1991) pour une critique et de la technique employée et de la conception implicite sous-jacente.

Le premier problème a trait à la **capacité de catégoriser comme équivalents des ensembles qui diffèrent sur de nombreuses dimensions sauf une : la cardinalité**. L'apprentissage des associations entre cardinalités et dénominations semble relever de mécanismes identiques à ceux des autres types de catégorisation. En particulier, comme pour toutes les catégories, dans le cas des nombres, le lexique aide à considérer comme équivalentes les cardinalités de collections dont les apparences conduiraient plutôt à les traiter différemment (Mix, 1999). Les noms de nombres doivent évoquer par association les cardinalités de manière précise et automatique, sauf à énoncer la suite des noms de nombres par le biais du comptage. Cette évocation ne va pas de soi. Elle constitue sans doute un problème majeur pour les jeunes enfants, de 18 mois à 4 ou 5 ans, voire au-delà (Fayol *et al.*, en préparation).

Le second problème concerne le **codage de l'accroissement des quantités**. Dans la vie quotidienne, cet accroissement se traduit par une augmentation de longueur, d'aire, de densité (d'objets sur une surface donnée) ou de volume (English & Halford, 1995) : plus le nombre d'éléments s'élève, plus la taille s'accroît. Le langage, lui, encode la quantité d'une manière conventionnelle, par le rang des dénominations (ou l'ordre des signes) : « six » renvoie à une quantité plus importante que « cinq » puisque « six » vient après « cinq », mais « six » ne comporte aucun indice de ce que la cardinalité qu'il évoque est supérieure à celle de « cinq ».

L'acquisition de la suite des noms de nombres, initialement (de 1 à 10) aussi lente et difficile pour tous les enfants du monde, devient ensuite d'autant plus ardue pour les enfants occidentaux que les systèmes de dénomination des nombres s'écartent du système décimal. Au contraire, il est facilité par les systèmes verbaux reposant sur la base dix, tel le système chinois (« dix un » pour 11, « dix deux » pour 12, « deux dix cinq » pour 25, etc.) (Miura *et al.*, 1993). Concernant la France, la forme de cette suite contraint les enfants à un apprentissage par cœur allant bien au-delà de dix, en raison des formes onze, douze... à seize, puis vingt, trente..., à soixante, et enfin à un traitement reposant sur la base 20 (vigésimale) : de soixante-dix à quatre-vingts puis quatre-vingt-dix. **Ces irrégularités de construction se traduisent par des erreurs et des retards dans l'apprentissage** (Fayol, 1990). Elles se manifestent non seulement dans les traitements et transcriptions (erronées) des nombres de 70 à 99 mais également de tous les nombres les incluant (trois cent soixante-dix-huit transcrit en « 3006018 » par exemple ; Jarlegan *et al.*, 1996 ; van Rinsveld & Schiltz, 2016). Elles induisent aussi des difficultés de traitement des quantités, des transcodings, voire des opérations (Seron & Fayol, 1994 ; Fayol & Seron, 2015). Une question fondamentale pour déterminer l'éventuel impact du langage sur la cognition arithmétique consiste à chercher à déterminer si les variations langagières influent sur les performances lors des activités arithmétiques, par exemple le dénombrement (Camos *et al.*, 1999) ou la résolution d'opérations (Geary *et al.*, 1996). Ho et Fuson (1998) ont montré que les élèves chinois répondent mieux et plus vite que leurs pairs anglophones à des opérations telles que  $10 + n$  ( $n$  variant entre 1 et 9) : la structure des dénominations au-delà de dix (13 se dit « dix trois ») favorise la résolution (voir aussi Brysbaert *et al.*, 1998 en néerlandais). Il reste que **l'étude précise des difficultés d'apprentissage et d'utilisation des noms de nombres en français** (notamment ceux qui utilisent la base 20 au-delà de soixante) **fait encore défaut**, et particulièrement en ce qui concerne les élèves issus de milieux défavorisés.

## Ce qu'il faut retenir (2)

Contrairement au **système approximatif du nombre** (ANS), le **traitement symbolique des quantités** (la cardinalité) se caractérise par sa précision. Il semble peu probable que les traitements symboliques s'enracinent dans les traitements analogiques approximatifs.

**Les enfants savent précocement compter verbalement sans pour autant comprendre ce que signifie compter** ou à quelle quantité correspond tel ou tel nom de nombre. Ils assignent peu à peu une signification de plus en plus sophistiquée aux noms de nombres, en mettant ces derniers en relation avec des quantités discrètes.

Le *subitizing* des petites quantités permettrait aux enfants de **comprendre les relations entre comptage et utilisation du principe cardinal** (associant le dernier nom de nombre énoncé lors du dénombrement au cardinal de l'ensemble dénombré). L'accès au principe cardinal **impulserait l'apprentissage des associations entre quantités et noms de nombre** et permettrait aux enfants de **généraliser aux nombres suivants**.

### III. DU CODAGE DES QUANTITÉS À LA RELATION D'ÉQUIVALENCE

Les symboles ou les signes représentent ou remplacent quelque chose d'autre. En mathématiques, certaines marques écrites (les chiffres) sont utilisées pour symboliser les quantités et d'autres correspondent aux opérations à effectuer sur ces mêmes quantités :  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ . Comme vu précédemment, **l'apprentissage des symboles procède d'abord en établissant des associations entre les quantités de référence et les noms de nombres ou les chiffres, signifiants arbitraires**. Ces connexions demandent du temps et des efforts pour s'installer, elles mettent longtemps à s'automatiser (Hawes *et al.*, 2019 ; Girelli *et al.*, 2000). **Les symboles relatifs aux opérations sur les quantités ne peuvent s'installer que dans un second temps**. Ils nécessitent initialement que les actions sur les quantités soient mises en parallèle avec les opérations sur les symboles. L'attention portée aux symboles et à leurs relations aux quantités se déplace sur les opérations et les règles régissant leur utilisation (Hiebert, 1988). Plus tard, viendront les apprentissages correspondant aux traitements algébriques (Wu, 2001) conduisant à aborder des équations du type  $a \times b = b \times a$  (commutativité) et  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  (distributivité) – apprentissages hors du champ de ce contribution mais qui en constituent le prolongement. De fait, **la puissance des mathématiques tient à ce que les symboles peuvent être manipulés sans tenir compte des référents, par abstraction d'avec les situations**.

Les opérations arithmétiques consistent à manipuler des symboles en respectant des règles plutôt que de réaliser des transformations sur les quantités concrètes associées à ces symboles (Fayol, 2022). À l'issue des manipulations symboliques réalisées, le résultat doit correspondre à celui auquel aurait abouti la manipulation effective des entités concrètes. Par exemple, la résolution de  $16 + 8$  assure que si l'on avait effectivement réuni 16 voitures d'une marque et 8 d'une autre, le total des véhicules atteindrait 24, en accord avec le résultat de l'opération. **Les enfants doivent découvrir que la manipulation réglée des symboles au cours des opérations équivaut à l'application concrète de transformations**. La mise en symboles permet d'écrire la relation d'équivalence  $16 + 8 = 24$  dans laquelle le signe  $=$  traduit, lui, non pas une transformation mais le fait que les quantités ou les valeurs représentées de chaque côté de ce signe sont les mêmes et sont substituables (Gilmore *et al.*, 2018 ; Powell, 2012).

Les travaux conduits au cours des deux dernières décennies ont montré que le signe  $=$  pose le plus souvent problème, même chez les élèves du second degré ; il est souvent erronément assimilé à l'indication d'une opération à exécuter, comme le font apparaître plusieurs recherches. Pour étudier la compréhension et l'utilisation du signe  $=$ , certains chercheurs ont demandé aux élèves de définir et expliquer le fonctionnement de ce signe ; d'autres ont proposé des équations à résoudre ; d'autres enfin ont testé l'encodage en effectuant des présentations rapides suivies d'un rappel. Les résultats convergent et montrent que beaucoup d'élèves (aux États-Unis, environ deux tiers des élèves ; Hornburg *et al.*, 2018) à plusieurs niveaux de la scolarité élémentaire (McNeil, 2007) et même secondaire (Chan *et al.*, 2022) traitent ce signe comme un indicateur d'opération à réaliser et non comme correspondant à une marque d'équivalence. Ces mêmes élèves produisent des erreurs récurrentes, par exemple  $3 + 4 = 5 + 12$  (au lieu de  $5 + 2$ ) ou  $3 + 4 = 5 + 7$  (au lieu de  $5 + 2$ ) (Fyfe *et al.*, 2021). Or cette interprétation ne correspond pas à la signification du signe  $=$  et fait même obstacle aux apprentissages ultérieurs en

arithmétique et en algèbre (McNeil *et al.*, 2019 ; Robinson *et al.*, 2018 ; Xu *et al.*, 2024). Ce fait est resté longtemps ignoré.

Les opérations arithmétiques ont donné lieu à de nombreux travaux (Fayol, 2022) allant du traitement des situations requérant des calculs, des plus simples (additions sans retenue) aux plus complexes (soustractions posées avec retenues) (Barrouillet, 2006 ; Thevenot *et al.*, 2023). D'autres travaux portent sur l'apprentissage des faits numériques directement récupérables en mémoire à long terme (par exemple  $3 + 3 = 6$  ou encore  $4 \times 5 = 20$  (Ashcraft, 1992 ; Roussel *et al.*, 2002), considéré comme un aboutissement de la phase antérieure dominée par les calculs. Par contraste, les dimensions conceptuelles des opérations ont été moins abordées. Les enfants découvrent assez facilement que la manipulation réglée des symboles (+, -, ×, ÷) équivaut à l'application concrète de transformations, et donc apprennent le codage des quantités par les chiffres et des transformations par les signes opératoires. En revanche, **il semble moins évident pour eux que la manipulation des symboles ouvre des possibilités** (des « libertés ») **de traitement des équivalences présentées de manière peu usuelle** telles que ( $3 + 4 + 5 = 3 + ?$ ) ou ( $? + 18 = 35$ ) (Crooks & Alibali, 2014) **ou encore rende parfois plus facile, plus rapide et tout aussi exact le traitement des opérations**. Ainsi, disposer d'un récipient contenant 3 litres de liquide et y verser 8 litres d'eau conduit en premier lieu à effectuer  $3 + 8$ . Pourtant, la manière la plus efficace de trouver la quantité totale consiste à effectuer  $8 + 3$  (voire  $8 + 2 + 1$ ). Ceci est possible du fait que l'addition est commutative, ce qui conduit à l'équivalence  $a + b = b + a$ . La découverte conceptuelle des propriétés des opérations arithmétiques (commutativité, inversion de l'addition et de la soustraction, associativité) constitue une étape dont on ignore encore comment elle s'articule précisément avec les progrès dans la maîtrise des algorithmes (Rittle-Johnson & Schneider, 2016). Elle semble soulever d'importantes difficultés (Koeninger & Nathan, 2004). Elle s'inscrit dans l'évolution des connaissances mathématiques dont la puissance tient à ce que les symboles peuvent être manipulés sans tenir compte des référents, par abstraction d'avec les situations (Hiebert, 1988), comme évoqué plus haut. Ce processus de distanciation par rapport aux situations concrètes va de pair avec la scolarisation.

Les difficultés relevées dans l'apprentissage de la notion d'équivalence et de son codage par le signe = ont conduit à effectuer des comparaisons internationales. Celles-ci ont révélé que certains systèmes éducatifs et culturels, notamment celui de la Chine, obtiennent de bons résultats aux épreuves testant l'utilisation de l'équivalence (Simsek *et al.*, 2022). D'autres recherches ont réalisé des analyses critiques des manuels en cours dans les classes aux États-Unis (McNeil *et al.*, 2006 ; McNeil, 2014) qui privilégient les présentations  $a + b = c$ , lesquelles induisent des apprentissages implicites de formats « canoniques » difficiles à dépasser (effet d'exposition ; McNeil, 2011), même lorsque l'attention des élèves est focalisée sur l'encodage (McNeil *et al.*, 2019). D'autres enfin ont mis en place des interventions faisant appel à des manipulations (Bajwa & Perry, 2021 ; Sherman & Bisanz, 2009 ; Warren & Cooper, 2005), des jeux (Tokac *et al.*, 2019), des démarches métacognitives (Fyfe *et al.*, 2021) destinées à en assurer la compréhension par les élèves (Alibali *et al.*, 2017). Au total, **les données suggèrent que l'interprétation erronée du signe = tient moins aux difficultés cognitives et conceptuelles des élèves qu'aux effets d'exposition dans les manuels et les classes à des configurations dominantes du type  $a + b = c$** , à un enseignement qui les privilégie et qui les rend très difficiles à combattre du fait de la confiance que leur témoignent les élèves (Grenell *et al.*,

2022). Les conséquences affectent négativement le codage et la compréhension des compositions additives des nombres (tout nombre peut être traité comme une composition d'autres nombres plus petits que lui :  $5 = 3 + 1 + 1$  ou  $2 + ? + 3 = 7$ , etc.). Ces (dé)compositions jouent un rôle important dans l'apprentissage des nombres et de leurs relations (Ching & Kong, 2022) ; de là les suggestions d'interventions précoces sur la notion d'équivalence (dès le CE1) et les propositions d'aménagements des manuels et de l'enseignement mis en œuvre.

### **Ce qu'il faut retenir (3)**

L'apprentissage des symboles procède d'abord en **établissant des associations entre quantités de référence et noms de chiffres puis de nombres** : cette première étape nécessite du temps et des efforts de la part des enfants. Dans un second temps, les symboles relatifs aux opérations peuvent s'installer : il s'agit ici pour les enfants de **découvrir que la manipulation réglée des symboles au cours des opérations équivaut à l'application concrète de transformations**. L'apprentissage de la signification du signe = comme symbole d'équivalence et les propriétés des opérations arithmétiques semblent soulever d'importantes difficultés chez les enfants.

## IV. DÉCRIRE, PRÉDIRE, INTERVENIR

Les recherches portant sur le développement des performances en arithmétique ont d'abord consisté en leur description dans différents sous-domaines, notamment l'apprentissage du traitement des quantités et l'apprentissage du nombre, à des âges ou niveaux (pré)scolaires successifs. Dans un premier temps, des approches transversales ont conduit à décrire l'évolution des acquis et les stratégies mobilisées par les enfants, par exemple les modalités de détermination des quantités – par *subitizing* ou par comptage – et le niveau des performances en comptage oral (Fuson, 1988) et aux épreuves de type « donne  $n$  » (voir ci-avant). **Des trajectoires ont ainsi été mises en évidence et comparées entre cultures, par exemple en fonction des langues, ou entre milieux socio-culturels.** Ces descriptions – indispensables pour commencer – ont fait apparaître la nécessité de rechercher les mécanismes sous-jacents susceptibles de rendre compte de la dynamique de l'évolution et des différences interindividuelles.

Pour illustration, Lyons et ses collaborateurs (2014) ont soumis des élèves néerlandais (1 300) de différents niveaux scolaires (du CP à la sixième, environ 200 par niveau) à une série d'épreuves allant de tâches non symboliques (collections de points) à l'utilisation de symboles arabes (comparaisons, comptage, ligne numérique, etc.). Cette étude transversale a montré que la prédiction des performances à des épreuves d'arithmétique normalisées niveau par niveau dépend :

- Chez les plus jeunes (CP et CE1), des scores aux épreuves de **cardinalité** (ligne numérique et comparaison de nombres) ;
- Du CP à la sixième, de plus en plus de **l'ordinalité** (dire si trois sont ou non ordonnés, par exemple « 5 – 6 – 7 » ou « 14 – 13 – 15 »).

L'importance de ces données tient à la **mise en évidence de l'importance de différentes dimensions et de l'évolution de leurs poids sur les performances en arithmétique** à différents niveaux de la scolarité (voir aussi Moore *et al.*, 2016). Toutefois, **la méthode ne permet de déterminer ni les trajectoires des élèves ni les possibles relations causales entre sous-domaines.** Des approches longitudinales sont nécessaires pour atteindre ces objectifs.

À partir des années 1990 environ ont été menées plusieurs études longitudinales. Celles-ci consistent en un **suivi sur des périodes de durées variables**, de quelques semaines à plusieurs années, **de l'évolution des performances** de populations plus ou moins étendues et bien définies : élèves tout-venant, faibles en mathématiques, enfants repérés comme dyscalculiques, etc. (Mazzocco & Thompson, 2005 ; Silver & Libertus, 2022). Elles peuvent viser une simple description de trajectoires individuelles différentes, de profils d'apprentissage détectés en utilisant des techniques statistiques parfois sophistiquées. Elles cherchent toutefois le plus souvent à **déterminer quelles variables** (indépendantes), évaluées au tout début des recherches, **permettent de prédire les performances, stratégies ou compétences ultérieures** (Fayol, 2017). Certaines ont étudié les capacités cognitives générales (attention, mémoire de travail, Bull *et al.*, 2008 ; Friso-van den Bos *et al.*, 2013 ; Klein & Bisanz, 2000 ; et plus récemment attitudes et émotions, Moore *et al.*, 2015) voire les caractéristiques socioculturelles susceptibles de rendre compte des évolutions ou des profils. D'autres se sont focalisées sur les

performances spécifiquement arithmétiques ou mathématiques (comparaisons de collections ou de nombres ; dénomination de chiffres, etc.), portant parfois sur des domaines très restreints, par exemple en s'interrogeant sur les relations potentielles entre les performances au traitement des quantités non symboliques et les résultats ultérieurs en mathématiques (Hannula-Sormunen *et al.*, 2015).

Plusieurs recherches, portant souvent sur les périodes précoces, entre la préscolarité (3 à 4 ans), l'école maternelle (*kindergarten* : 5 à 6 ans) et la scolarité élémentaire (du cours préparatoire au cours moyen, voire au-delà), et couvrant d'une à cinq ou six années, ont été conduites (Aunio & Niemivirta, 2010 ; Aunola *et al.*, 2004 ; Halberda *et al.*, 2009 ; Jordan *et al.*, 2009 ; Kolkman *et al.*, 2013 ; Krajewski & Schneider, 2009). Elles s'attachent souvent à **déterminer si et comment les capacités informelles non verbales** (le sens du nombre) **développées entre la naissance et 3-4 ans influent sur les apprentissages formels réalisés explicitement au cours de la période scolaire**. Elles visent également à mettre en évidence le rôle de médiateurs susceptibles d'expliquer la transition de traitements préverbaux approximatifs et précoces à des traitements précis associés aux systèmes symboliques verbaux ou arabes. Elles contribuent toutes à préciser les variables qui, à un moment déterminé, permettent de prédire statistiquement les résultats ultérieurs, sur une durée pouvant varier de plusieurs mois à plusieurs années. Les épreuves utilisées consistent essentiellement en comparaisons de paires de collections de points ou de nombres (exprimés en chiffres arabes). Les résultats montrent que les scores aux tests arithmétiques des enfants de fin de 1<sup>re</sup> année de scolarité élémentaire (additions, soustractions, suites de nombres, etc.) dépendent à la fois des performances aux épreuves non symboliques et de la médiatisation par la connaissance symbolique des chiffres. Au total, les différences interindividuelles d'acuité de perception des différences entre entités non symboliques (collections, etc.) évaluées entre 4 et 6 ans expliquent statistiquement une part significative de variance des résultats ultérieurs aux traitements des opérations et des problèmes verbaux. Ces performances précoces prédisent aussi la croissance des scores entre niveaux successifs, mais leurs poids diffèrent de manière mal connue selon les dimensions évaluées et les périodes considérées.

Pourtant, **les résultats moyens des groupes d'élèves étudiés ne doivent pas faire oublier les très fortes différences interindividuelles**. Ainsi, Dowker (2008) a suivi 80 enfants de 42 à 63 mois en leur proposant une série d'épreuves : dénombrement (collections de 5, 8, 10, 12, 21 objets) ; compréhension du principe cardinal (« donne-moi  $n$  objets ») ; compréhension de l'indépendance de l'ordre et, plus généralement, distinction entre modifications qui changent (ajout vs retrait) ou non (compter dans un autre sens) la quantité. Les résultats ont mis en évidence de très importantes différences interindividuelles à l'intérieur de chaque épreuve comme entre les épreuves. Les analyses statistiques ont montré que la performance à une épreuve ne prédit pas complètement, à elle seule, la performance à une autre. Une recherche d'orientation clinique (Stock *et al.*, 2010) a consisté à suivre pendant 3 ans des enfants belges néerlandophones ( $n = 464$ ) de la grande section de maternelle au CE1, de manière à déterminer quelles performances spécifiques au niveau préscolaire fournissent les indications les plus fiables pour détecter à partir des performances en maternelle l'appartenance future des élèves aux groupes de dyscalculiques potentiels (AD : *arithmetic disabilities*, < 10<sup>e</sup> percentile), de faibles (LA : *low achievers*, entre 11<sup>e</sup> et 25<sup>e</sup> percentiles) et de tout-venant (TA : *typical achievers* > 25<sup>e</sup> percentile). Les auteurs rapportent que l'épreuve de comparaisons de quantités a la plus

grande sensibilité tandis que les tâches de comptage ont la meilleure spécificité (voir Focus 1).

### Focus 1. Évaluation d'un instrument diagnostique

La valeur d'un instrument utilisé pour diagnostiquer une caractéristique (par exemple, présence ou absence d'un trouble) dépend :

- D'une part, de sa **sensibilité** : il s'agit de « la capacité de l'instrument à **identifier correctement les individus présentant la caractéristique** [...]. Il s'agit de la capacité de détection de l'instrument » (Degraeve, 2022, p. 388) ;
- D'autre part, de sa **spécificité** : il s'agit de « la capacité de l'instrument à **identifier correctement les individus ne présentant pas la caractéristique** [...]. Il s'agit de la capacité de discrimination de l'instrument » (*ibid.*).

On distingue ainsi :

- Les **vrais positifs** : individus possédant effectivement la caractéristique et pour lesquels l'instrument donne un résultat positif ;
- Les **faux positifs** : individus ne possédant pas la caractéristique mais pour lesquels l'instrument donne un résultat positif ;
- Les **vrais négatifs** : individus ne possédant pas la caractéristique et pour lesquels l'instrument donne un résultat négatif ;
- Les **faux négatifs** : individus possédant effectivement la caractéristique mais pour lesquels l'instrument donne un résultat négatif.

La combinaison des deux indices conduit à 87,5 % de prédictions correctes. Tous ces travaux ont abouti à suggérer que **certaines épreuves (voire certains items) permettent mieux que d'autres de détecter les difficultés ou plus simplement de mettre en évidence des trajectoires de réussite ou d'échec**. Cette étape de type corrélationnel a un caractère indispensable pour réduire le nombre de variables potentielles susceptibles d'influer sur l'évolution des performances et de s'attacher le plus tôt possible à des tentatives d'interventions.

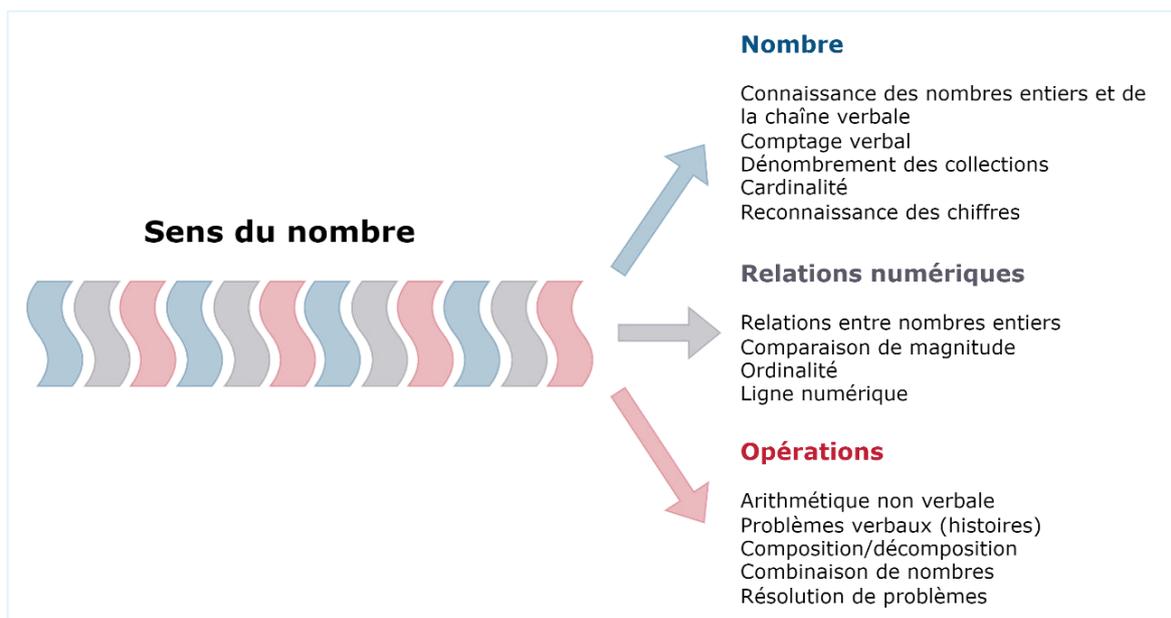
La poursuite des recherches conduit nécessairement à mettre en place des interventions (Gersten *et al.*, 2005). De fait, les données issues d'études longitudinales fournissent des corrélations qui ne permettent ni de déterminer la direction des éventuelles relations causales ni d'isoler les contributions spécifiques des différentes variables. Elles ignorent par ailleurs souvent les modalités d'intervention, même si cette dimension prend de plus en plus d'importance. Dans cette perspective et en vue d'utiliser les données pour mieux assurer la détection et la prise en charge des dyscalculiques développementaux (DD), Mazzocco et Räsänen (2013) ont analysé les études longitudinales disponibles afin de déterminer les trajectoires et les rythmes de développement en fonction de différentes dimensions et ont également pris en compte les résultats des (rares) études d'intervention permettant d'établir avec un bon niveau de certitude l'existence de relations causales. Par exemple, des enfants DD ont bénéficié de 16 semaines d'entraînement : seulement deux tiers d'entre eux progressent, les autres manifestant une « résistance à l'intervention ». La fréquence de cette résistance varie selon la gravité de difficultés : rare avec les tout-

venants, plus fréquente avec les faibles et encore plus avec les MD (*mathematically disabled*) et surtout les DD (*developmental dyscalculics*). La stabilité des performances (66 % dans l'ensemble) varie : elle diminue avec les procédures, ce qui atteste la possibilité d'en améliorer l'apprentissage, mais pas avec la **fluence**. Les auteurs concluent à l'importance de s'attacher aux différentes composantes telles qu'elles sont identifiées et à leurs poids respectifs, qui peut évoluer en fonction de l'âge et des environnements, ces derniers incluant les modalités d'enseignement. Ces données ont conduit les chercheurs et praticiens intervenant dans le champ de la psychologie clinique à **privilégier les interventions focalisées sur des composantes spécifiques dont plusieurs résultats ont montré l'efficacité** (Dowker & Sigley, 2010 ; Holmes & Dowker, 2013). **Les questions se posent en d'autres termes lorsque les interventions concernent des groupes voire des classes entières.**

Certaines expériences ont été conduites visant à améliorer les performances des élèves en mathématiques. Plusieurs ont mis en place des dispositifs pour de jeunes élèves, (entre 3 et 5 ans) du fait que les inégalités de performances dans les domaines du nombre sont détectées très précocement (Jordan *et al.*, 2022). De ce fait, **les économistes comme les sociologues et les psychologues défendent l'idée que seules des interventions précoces sont en mesure de réduire ces inégalités dont les observations témoignent qu'elles tendent à s'accroître avec la montée dans les niveaux scolaires** (Bailey *et al.*, 2021 ; Bodovsky & Youn, 2012 ; Daucourt *et al.*, 2021). Pour déterminer quelles interventions concevoir et implémenter, plusieurs résultats ont été exploités (Nguyen *et al.*, 2016 ; Wong & Chan, 2019).

Jordan *et al.* (2022) proposent que les actions intègrent trois sous-domaines en interactions : 1) les nombres entiers et la suite verbale, la correspondance terme à terme, la cardinalité et la reconnaissance des chiffres ; 2) les relations entre nombres entiers (plus, moins, autant) ; l'ordinalité et les comparaisons ; la ligne numérique ; 3) les opérations : ajouts et retraits ; compositions et décompositions ; présentations non-verbales ou sous formats d'histoires ou de faits numériques.

**Figure 2. Composantes du sens du nombre selon Jordan et al. (2022)**



Source : d'après Jordan et al., 2022.

Ces domaines sont chacun susceptibles de donner lieu à des activités adaptées aux différences individuelles, constituant des opportunités d'apprentissage et visant à offrir des difficultés potentiellement surmontables (sans supprimer les obstacles), à les affronter avec aide éventuelle de sorte que les élèves puissent progresser (Byrnes & Wasik, 2009). Ces activités, diverses (Clements et al., 2023), peuvent être proposées dans un cadre préscolaire ou familial, et leurs effets peuvent donner lieu à une évaluation (Cahoon et al., 2023 ; Devlin et al., 2022 ; Lefevre et al., 2010). Elles peuvent aussi être organisées en situation scolaire.

Relativement peu de travaux ont abordé l'enseignement des mathématiques reposant sur la recherche (*research-based*), probablement en raison du coût en organisation et de la difficulté de mettre en place des dispositifs complexes en situation ordinaire tout en assurant le contrôle de la mise en œuvre de ces dispositifs et l'évaluation de leurs effets. Ceux qui l'ont fait soulignent l'importance d'assurer à tous les élèves, notamment ceux issus des milieux les plus défavorisés, une formation de base précoce en mathématiques leur permettant de bénéficier ensuite des enseignements ultérieurs. **Le postulat de ces travaux est que tous les élèves disposent des capacités de base et que les apprentissages dépendent des opportunités de mobiliser celles-ci et d'apporter à travers un enseignement de qualité les savoirs et savoir-faire nécessaires aux progrès** (Clements et al., 2023 ; Clements & Sarama, 2007, 2011). Plusieurs recherches ont été conduites, qui ont effectivement abouti à des améliorations de performances plus ou moins importantes et significatives, avec pour certaines des suivis évaluant la stabilité des acquis et le bénéfice ultérieurs des progrès réalisés (Chard et al., 2008 ; Clements et

*al.*, 2011 ; Greenes *et al.*, 2004 ; Shanley *et al.*, 2017 ; et en France, Darnon & Fayol, 2022 ; Vilette *et al.*, 2017)<sup>4</sup>.

#### **Ce qu'il faut retenir (4)**

Les premières recherches portant sur le développement des compétences arithmétiques des enfants ont d'abord consisté en leur **description** dans différents sous-domaines à des âges successifs. Des **approches transversales** ont permis de déterminer les stratégies mobilisées par les enfants pour résoudre certaines tâches, mettant ainsi en évidence des **trajectoires d'évolution de groupes**. À partir des années 1990, des **approches longitudinales** (suivis variant entre quelques semaines et plusieurs années) ont permis de suivre l'évolution des populations, déterminant ainsi quelles variables permettent de **prédire** les performances mathématiques ultérieures. Si des effets de groupe ont pu être dégagés, les phénomènes étudiés sont sujets à de fortes variations interindividuelles (selon les cultures, milieux socio-culturels, langues, etc.).

L'ensemble de ces recherches ont conduit les chercheurs et les praticiens à expérimenter des **interventions** auprès d'individus (psychologie clinique) ou auprès de groupes (voire de classes entières). Le postulat de tous ces travaux est que **tous les élèves disposent des capacités de base nécessaires aux apprentissages mathématiques**. Les psychologues, sociologues et économistes défendent notamment l'idée que seules des interventions précoces sont en mesure de **réduire les inégalités** entre enfants, qui tendent sinon à s'accroître avec le temps.

---

<sup>4</sup> Dans cette perspective, voir par exemple Dgesco, 2023.

## CONCLUSION

Les données accumulées au cours des deux ou trois dernières décennies ont mis en évidence le **déroulement apparemment général, lent et hiérarchisé de l'apprentissage des nombres entiers** dans les cultures disposant de systèmes verbaux de dénomination des quantités. Cet apprentissage se réalise au gré des interactions avec les adultes et les pairs, et en relation avec les situations de la vie courante fournissant des opportunités d'observations et d'actions. Ces dernières semblent jouer un rôle important, au point que l'utilisation de plus en plus systématique du paiement par carte bancaire et d'achats d'entités non plus à l'unité mais par groupements de tailles diverses (par 4, 6, 12, etc.) peut faire craindre un manque de familiarisation avec et d'apprentissages implicites de la numération et des pratiques de manipulation des quantités et des mesures par les enfants jeunes. De plus, il n'est pas certain que le recours aux jeux puisse se substituer efficacement aux activités quotidiennes d'emploi de la monnaie, d'interactions au cours des échanges et d'utilisation des mesures.

La (pré)scolarisation précoce des enfants, de plus en plus répandue dans le monde entier pourra/pourrait sans doute assurer en partie des apprentissages de base du nombre, du dénombrement, des transformations, etc. L'extension dans plusieurs pays des recherches portant sur l'évolution des savoirs, des savoir-faire et des notions arithmétiques n'est sans doute pas fortuite : **la prise de conscience de l'importance croissante des connaissances scientifiques conjuguée aux constats des performances aux évaluations internationales (PISA, TIMSS, PASEC) devrait conduire à définir de manière de plus en plus précise des programmes mais aussi (et surtout ?) des modalités d'interventions susceptibles d'assurer des apprentissages efficaces et stables chez tous les élèves**<sup>5</sup>. Les quelques études scientifiquement contrôlées recensées dans ce texte restent trop rares et ne portent que sur des populations restreintes et localisées pour que des principes généraux puissent en être déduits. En particulier, peu d'entre elles abordent la question des inégalités – très précoces – et des interventions efficaces parvenant à les réduire de manière stable, de sorte que les apprentissages ultérieurs capitalisent sur des savoirs et savoir-faire initiaux consolidés.

Il s'agit d'un énorme chantier qui devra mobiliser la formation des enseignants, l'étude expérimentale des progressions et des activités à proposer et évaluer, mais qui devra aussi se préoccuper de l'implication des parents. Les travaux relatifs à l'apprentissage des nombres entiers et à ses utilisations ont un bel avenir et une certaine urgence compte-tenu des résultats actuels.

---

<sup>5</sup> Par exemple, voir aussi WWC, s.d.

## BIBLIOGRAPHIE

- Alibali, M.W., Crooks, N.M., & McNeil, N.M. (2017). Perceptual support promotes strategy generation: Evidence from equation solving. *British Journal of Developmental Psychology*, <https://doi.org/10.1111/bjdp.12203>
- Andres, M., Di Luca, S., and Pesenti, M. (2008). Finger counting: the missing tool? *Behavioral and Brain Sciences*, 31(6), 642–643. <https://doi.org/10.1017/S0140525X08005578>
- Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition*, 44, 75–106. [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(92\)90051-I](https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90051-I)
- Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children’s mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20, 427-435. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.00>
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 699-713. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.699>
- Bailey M. J., Sun S., & Timpe, B. (2021). Prep School for Poor Kids: The Long-Run Impacts of Head Start on Human Capital and Economic Self-Sufficiency. *The American Economic Review*, 111(12), 3963-4001. <https://doi.org/10.1257/aer.20181801>
- Bajwa, N. P., & Perry, M. (2021). Features of a pan balance that may support students’ developing understanding of mathematical equivalence, *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 1-27, <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1700587>
- Baroody, A. J., Mix, K. S., Kartal, G., & Lai, M.-I. (2023). The Development and Assessment of Early Cardinal-Number Concepts. *Journal of Numerical Cognition*, 9(1), 182-195. <https://doi.org/10.5964/jnc.10035>
- Barrouillet, P. (2006). L’émergence des outils arithmétiques. In P. Barrouillet & V. Camos (Eds.), *La cognition mathématique chez l’enfant*. SOLAL.
- Benoit, L., Lehalle, H., & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development*, 19(3), 291-307. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2004.03.005>
- Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C., & Jouen, F. (2013). Young children’s mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition*, 129, 95-101. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.06.005>
- Bodovsky, K., Youn, M. (2012). Students’ Mathematics Learning from Kindergarten through 8th Grade: The Long Term Influence of School Readiness. *International Journal of Sociology of Education*, 1(2), 97-122. <https://doi.org/10.4471/rise.2012.07>

- Brissiaud, R. (1991). Calculer et compter de la petite section, à la grande section. *Grand N*, 49, 37-48. [https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/calculer-et-compter-de-la-petite-section-a-la-grande-section\\_1562940027214-pdf](https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/calculer-et-compter-de-la-petite-section-a-la-grande-section_1562940027214-pdf)
- Bull, R., Espy, K.A., & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 205-228. <https://doi.org/10.1080/87565640801982312>
- Brysbart, M., Fias, W. et Noël, M.-P. (1998). The Whorfian hypothesis and numerical cognition: Is twenty-four processed in the same way as four and twenty. *Cognition*, 66, 51-77. [https://doi.org/10.1016/s0010-0277\(98\)00006-7](https://doi.org/10.1016/s0010-0277(98)00006-7)
- Byrnes, J.P., & Wasik, B.A. (2009). Factors predictive of mathematics achievement in kindergarten, first and third grades: An opportunity-propensity analysis. *Contemporary Educational Psychology*, 34, 167-183. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.01.002>
- Cahoon, A., Jiménez Lira, C., Estévez Pérez, N., Benavides Pando, E. V., Campver García, Y., Susana Paz García, D., & Simms, V. (2023). Meta-Analyses and Narrative Review of Home-Based Interventions to Improve Literacy and Mathematics Outcomes for Children Between the Ages of 3 and 5 Years Old. *Review of Educational Research*, 0(0). <https://doi.org/10.3102/00346543231212491>
- Camos, V., Fayol, M. & Barrouillet, P. (1999). L'activité de dénombrement chez l'enfant : Double tâche ou procédure. *L'Année Psychologique*, 99, 623-645.
- Centre national de ressources textuelles et lexicales (CNRTL) (s.d.-a). *Équivalence*. <https://www.cnrtl.fr/definition/%C3%A9quivalence>
- Centre national de ressources textuelles et lexicales (CNRTL) (s.d.-b). *Grandeur*. <https://www.cnrtl.fr/definition/grandeur>
- Chan, J., Y-C., Lee, J.E., Mason, C.A., Sawrey, K., Ottmar, E. (2022). From Here to There! A Dynamic Algebraic Notation System Improves Understanding of Equivalence in Middle School Students. *Journal of Educational Psychology*, 114(1), 56-71. <https://doi.org/10.1037/edu0000596>
- Chard, D. J., Baker, S.K., Clarke, B., Jungjohann, K., Davis, K., & Smolkowski, K. (2008). Preventing early mathematics difficulties: The feasibility of a rigorous kindergarten mathematics curriculum. *Learning Disability Quarterly*, 31, 11-19. <https://doi.org/10.2307/30035522>
- Ching, B. H.-H., & Kong, K.H.C. (2022). Understanding additive composition is important for symbolic numerical magnitude processing. *Cognitive Development*, 62, 101170. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2022.101170>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 136-163.

- Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A. & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics Learned by Young Children in an Intervention Based on Learning Trajectories: A Large-Scale Cluster Randomized Trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(2), 127-166. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.2.0127>
- Clements, D. H., Sarama, J., & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The Neglected Quantifier. In A. Norton, M. W. Alibali (Eds.), *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education* (Research in Mathematics Education). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2)
- Clements, D. H., Lizcano, R., & Sarama, J. (2023). Research and Pedagogies for Early Math. *Education Science*, 13, 839. <https://doi.org/10.3390/educsci13080839>
- Condry, K. F., & Spelke, E. S. (2008). The development of language and abstract concepts: The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology: General*, 137(1), 22-38. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.137.1.22>
- Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge of mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344-377. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001>
- Darnon, C., & Fayol, M. (2022). Can an early mathematical intervention boost the progress of children in kindergarten? A field experiment. *European Journal of Psychology of Education*, 37, 1-18. <https://doi.org/10.1007/s10212-021-00550-4>
- Daucourt, M.C., Napoli, A.R., Quinn, J.M., Wood, S.G., & Hart, S.A. (2021). The Home Math Environment and Math Achievement: A Meta-Analysis. *Psychological Bulletin*, 147(6), 565-596. <https://doi.org/10.1037/bul0000330>
- Decarli, G., Surian, L., & Piazza, M. (2023). Number sense at 12 months predicts 4-year-olds' maths skills. *Developmental Science*, 26(6), e13386. <https://doi.org/10.1111/desc.13386>
- Degraeve, B. (2022). Chapitre 12. Évaluation des performances et statistiques du cas unique. In B. Degraeve, *Statistiques en psychologie et neuropsychologie: Méthodes, applications et exercices corrigés* (p. 371-414). Dunod.
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense*. Oxford University Press.
- Dehaene, S. (2008). *Fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire. Le concept de nombre*. <https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/fondements-cognitifs-de-arithmetique-elementaire/le-concept-de-nombre>
- Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths : 15 ans après*. Odile Jacob.
- Devlin, B. L., Jordan, N.C., & Klein, A. (2022). Predicting mathematics achievement from subdomains of early number competence: Differences by grade and achievement level. *Journal of Experimental Child Psychology*, 217, 105354. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105354>

Di Luca, S., & Pesenti, M. (2011). Finger numeral representations: More than just another symbolic code. *Frontiers in Psychology*, 2, 272. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00272>

Direction générale de l'enseignement scolaire (Dgesco) (2023). *La construction du nombre à l'école maternelle*. <https://eduscol.education.fr/document/50924/download?attachment>

Dowker, A. (2008). Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Psychological Science*, 11(5), 650-654. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00713.x>

Dowker, A., & Sigley, G. (2010). Targeted interventions for children with arithmetical difficulties. *British Journal of Educational Psychology Monograph series II*(7), 65-71. <https://doi.org/10.1348/97818543370009X12583699332492>

English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education*. L.E.A.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Delachaux & Niestlé.

Fayol, M. (2001). Langage et développement apprentissage de l'arithmétique cognitive. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds.), *Le développement des activités numériques* (p. 151-173). Hermès.

Fayol, M. (2015). *Nombres et opérations : Premiers apprentissages. Un bilan scientifique*. Cnesco. <https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf>

Fayol, M. (2017). L'apport des recherches longitudinales à la cognition arithmétique. *Rééducation Orthophonique*, 269, 13-38.

Fayol, M. (2022). *L'acquisition du nombre*. Presses Universitaires de France.

Fayol, M., & Seron, X. (2005). On numerical representations. Insights from experimental, neuropsychological, and developmental research. In J. Campbell (Ed.), *Handbook of numerical cognition*. Academic Press.

Fayol, M., & Seron, X. (2015). Phonological similarity can also impair transcoding. In C. Artésano & M. Jucla (Eds.), *Neuropsycholinguistic perspectives on language cognition* (p. 77-87). Psychology Press.

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 123, 53-72. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.013>.

Frank, M. C., & Barner, D. (2012). Representing Exact Number Visually Using Mental Abacus. *Journal of Experimental Psychology: General*, 141(1), 134-149. <https://doi.org/10.1037/a0024427>

Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., & Kroesbergen, E. H. (2013). Working-memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 10, 29-44. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.05.003>

- Fuson, K. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. Springer.
- Fyfe, E. R., Byers, C., & Nelson, N. J. (2021). The Benefits of a Metacognitive Lesson on Children's Understanding of Mathematical Equivalence, Arithmetic, and Place Value. *Journal of Educational Psychology*, 114(6), 1292-1306. <https://doi.org/10.1037/edu0000715>
- Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Liu, F., & Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development*, 67, 2022-2044. <https://doi.org/10.2307/1131607>
- Geary, D. C., & Van Marle, K. (2016). Young children's core symbolic and non-symbolic quantitative knowledge in the prediction of later mathematics achievement. *Developmental Psychology*, 52(12). <https://doi.org/10.1037/dev0000214>
- Geary, D. C., & Van Marle, K. (2018). Growth of symbolic number knowledge accelerates after children understand cardinality. *Cognition*, 177, 69-78. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2018.04.002>
- Gelman, R. et Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Harvard University Press.
- Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293-304. <https://doi.org/10.1177/00222194050380040301>
- Gilmore, C., Göbel, S., & Inglis, M. (2018). *An introduction to mathematical cognition*. Routledge.
- Girelli, L., Lucangeli, D., & Butterworth, B. (2000). The development of automaticity in accessing number magnitude. *Journal of Experimental Child Psychology*, 76(2), 104-122. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2564>
- Gliksman, Y., Berebbi, S., & Henik, A. (2022). Math Fluency during Primary School. *Brain Sciences*, 12(3), 371. <https://doi.org/10.3390/brainsci12030371>
- Goffin, C., & Ansari, D. (2019). How Are Symbols and Non-symbolic Numerical Magnitudes Related? Exploring Bidirectional Relationships in Early Numeracy. *Mind, Brain, and Education*, 13(3), 143-156. <https://doi.org/10.1111/mbe.12206>
- Gray, S. A., & Reeve, R. A. (2014). Preschoolers' dot enumeration abilities are markers of their arithmetic competence. *PLOS ONE*, 9(4), e94428. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0094428>
- Greenes, C., Ginsburg, H. P., & Balfanz, R. (2004). Big math for little kids. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 159-166. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.010>
- Grenell, A., Nelson, L. J., Gardner, B., & Fyfe, E. R. (2022). Children's confidence using incorrect strategies on mathematical equivalence problems. *Cognitive Development*, 62, 101167. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2022.101167>

- Guedin, N., Thevenot, C., & Fayol, M. (2018). Des doigts et des nombres. *Psychologie Française*, 63(4), 379-399. <https://doi.org/10.1016/j.psfr.2017.07.001>
- Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the "number sense": The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44(5), 1457-1465. <https://doi.org/10.1037/a0012682>
- Halberda, J., Mazocco, M. M. M., & Feigenson, L. (2009). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455, 665-669. <https://doi.org/10.1038/nature07246>
- Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2015). Preschool children's spontaneous focusing on numerosity, subitizing, and counting skills as predictors of their mathematical performance seven years later at school. *Mathematical Thinking and Learning*, 17, 155-177. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016814>
- Hawes, Z., Nosworthy, N., Archibald, L., & Ansari, D. (2019). Kindergarten children's symbolic number comparison skills predict first grade mathematics achievement: Evidence from a two-minute paper-and-pencil test. *Learning and Instruction*, 59, 21-33. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.09.004>
- Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333-355. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.3.536>
- Ho, C. S., & Fuson, K. (1998). Children's knowledge of teen quantities as tens and ones: Comparisons of Chinese, British, and American kindergartners. *Journal of Educational Psychology*, 90, 536-544. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.3.536>
- Hodent, C., Bryant, P., & Houdé, O. (2005). Language-specific effects on number computation in toddlers. *Developmental Science*, 8(5), 420-423. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2005.00430.x>
- Holmes, W., & Dowker, A. (2013). Catch up numeracy: A targeted intervention for children who are low attaining in mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 249-265. <https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803779>
- Hornburg, C. B., Wang, L., & McNeil, N. M. (2018). Comparing meta-analysis and individual person data analysis using raw data on children's understanding of equivalence. *Child Development*, 89(6), 1983-1995. <https://doi.org/10.1111/cdev.13058>
- Huang, Y. T., Spelke, E. S., & Snedeker, J. (2010). When is four far more than three? Children's generalization of newly-acquired number words. *Psychological Science*, 21(4), 600-606. <https://doi.org/10.1177/0956797610363552>
- Hutchison, J. E., Ansari, D., Zheng, S., De Jesus, S., & Lyons, I. M. (2020). The relation between subitizable symbolic and non-symbolic number processing over the kindergarten school year. *Developmental Science*, 23, e12884. <https://doi.org/10.1111/desc.12884>

- Hyde, D. C., Khanum, S., Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic, approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. *Cognition*, 131(1), 92-107. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.12.007>
- Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S., & Dehaene, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical Psychology*, 21(4), 491-505. <https://doi.org/10.1080/09515080802285354>
- Izard, V., Streri, A., & Spelke, E. S. (2014). Toward Exact Number: Young Children Use One-to-one Correspondence to Measure Set Identity but not Numerical Equality. *Cognitive Psychology*, 72, 27-53. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2014.01.004>
- Jarlegan, A., Fayol, M. & Barrouillet, P. (1996). De soixante-douze à 72, et inversement: Une étude du transcodage chez les enfants de 7 ans. *Revue de Psychologie de l'Éducation*, 1, 87-108.
- Jordan, N. C., Devlin, B. L., & Botello, M. (2022). Core foundations of early mathematics: refining the number sense framework. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 46, 101181. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101181>
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcome. *Developmental Psychology*, 45(3), 850-867. <https://doi.org/10.1037/a0014939>
- Kébé, A. B. (2024). À quels moments du processus mathématique les langues nationales interviennent-elles ? Regards croisés d'enseignants. In *Conférence de consensus « Enseignement et apprentissage des mathématiques au primaire » : Notes des experts* (p. 43-58). Confemen, Cnesco-Cnam. [https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2024/05/Confemen-Cnesco\\_CC-maths-primaire\\_Notes-des-experts.pdf](https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2024/05/Confemen-Cnesco_CC-maths-primaire_Notes-des-experts.pdf)
- Klahr, D., & Wallace, J. G. (1976). *Cognitive development: An information-processing view*. L. Erlbaum Associates.
- Klein, J., & Bisanz, G. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54, 105-115. <https://doi.org/10.1037/h0087333>
- Koeninger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(2), 129-164. <https://www.jstor.org/stable/1466903>
- Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. M. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction*, 25, 95-103. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.12.001>
- Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19, 513-526. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.10.002>

- Le Corre, M. (2014). Children acquire the later-greater principle after the cardinal principle. *British Journal of Developmental Psychology*, 32, 163-177. <https://doi.org/10.1111/bjdp.12029>
- Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105, 395-438. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005>
- Lefevre, J.-A., Fast, L., Skwarchuk, S.-L., Smith-Chant, B. L., Bisanz, J., Kamawar, D., & Penner-Wilger, M. (2010). Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child Development*, 81, 1753-1767. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01508.x>
- Léger, L. (2016). La mémoire. In L. Léger, *Manuel de psychologie cognitive* (p. 53-106). Dunod.
- Lingani, O. (2024). Quels peuvent être les usages de la langue maternelle et de la langue de scolarisation pour favoriser la conceptualisation mathématique chez les élèves ? In *Conférence de consensus « Enseignement et apprentissage des mathématiques au primaire » : Notes des experts* (p. 33-42). Confemen, Cnesco-Cnam. [https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2024/05/Confemen-Cnesco\\_CC-maths-primaire\\_Notes-des-experts.pdf](https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2024/05/Confemen-Cnesco_CC-maths-primaire_Notes-des-experts.pdf)
- Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. *Developmental Science*, 17(5), 714-726. <https://doi.org/10.1111/desc.12152>
- Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, 111(1), 1-22. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.111.1.1>
- Marchand, E., Lovelett, J. T., Kendro, K., & Barner, D. (2022). Assessing the knower-level framework: How reliable is the Give-a-Number task? *Cognition*, 222, 104998. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2021.104998>
- Mazzocco, M. M. M., & Räsänen, P. (2013). Contribution of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 65-73. <https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.05.001>
- Mazzocco, M. M. M., & Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice*, 20, 142-155. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x>
- McNeil, N. M. (2007). U-Shaped Development in Math: 7-Year-Olds Outperform 9-Year-Olds on Equivalence Problems. *Developmental Psychology*, 43(3), 687-695. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.3.687>
- McNeil, N. M. (2014). A Change-Resistance Account of Children's Difficulties Understanding Mathematical Equivalence. *Child Development Perspectives*, 8(1), 42-47. <https://doi.org/10.1111/cdep.12062>

- McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shiple, H. (2011). Benefits of Practicing  $4 = 2 + 2$ : Nontraditional Problem Formats Facilitate Children's Understanding of Mathematical Equivalence. *Child Development*, 82(5), 1620-1633. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01622.x>
- McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385. <https://www.jstor.org/stable/27739839>
- McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Devlin, B. L., Carrazza, C., & McKeever, M. O. (2019). Consequences of Individual Differences in Children's Formal Understanding of Mathematical Equivalence. *Child Development*, 90(3), 940-956. <https://doi.org/10.1111/cdev.12948>
- Michie, S. (1985). *Development of Absolute and Relative Concepts of Number in Preschool Children*. *Developmental Psychology*, 21(2), 247-252. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.21.2.247>
- Miller, K. F., & Paredes, D. R. (1996). On the shoulders of giants: Cultural tools and mathematical development. In R. Sternberg & T. Ben Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (p. 83-117). Erlbaum.
- Miller, K. F., Smith, C.M., Zhu, J. & Zhang, H. (1995). Developmental origins of cross-national differences in mathematical competences. *Psychological Science*, 6, 56-60. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1995.tb00305>
- Miura, I., Okamoto, Y., Kim C. C., Steere, M. & Fayol, M. (1993). First graders' cognitive representation of numbers and understanding of place value: Cross-national comparison - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 85, 24-30. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.85.1.24>
- Mix, K. S. (1999). Similarity and numerical equivalence appearances count. *Cognitive Development*, 14(2), 269-297. [https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(99\)00005-2](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(99)00005-2)
- Mix, K. S. (2008). Children's equivalence judgments: Crossmapping effects. *Cognitive Development*, 23(1), 191-203. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2007.03.001N22>
- Mix, K. S., Sandhofer, C. M., & Baroody, A. (2005). Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. *Advances in Child Development and Behavior*, 33, 305-346. [https://doi.org/10.1016/S0065-2407\(05\)80011-4](https://doi.org/10.1016/S0065-2407(05)80011-4)
- Moore, A. M., Rudig, N., & Ashcraft, M. H. (2015). Affect, Motivation, Working Memory, and Mathematics. In R. Cohen et A. Dowker (Eds.), *The Oxford Handbook for Numerical Cognition* (p. 933-952). Oxford Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.004>
- Moore, A. M., van Marle, K., & Geary, D. C. (2016). Kindergartners' fluent processing of symbolic numerical magnitude is predicted by their cardinal knowledge and implicit

understanding of arithmetic 2 years later. *Journal of Experimental Child Psychology*, 150, 31-47. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.05.003>

Mou, Y., Zhang, B., Piazza, M., & Hyde, D. C. (2021). Comparing set-to-number and number-to-set measures of cardinal number knowledge in preschool children using latent variables. *Early Childhood Research Quarterly*, 54, 125-135. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2020.05.016>

Nguyen, T., Watts T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe C., & Spitler, M. E. (2016). Which Preschool Mathematics Competencies Are Most Predictive of Fifth Grade Achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 550-560. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003>

Nieder, A. (2021). The Evolutionary History of Brains for Numbers. *Trends in Cognitive Sciences*, 25(7), 608-621. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2021.03.012>

Núñez, R. E. (2017). Is There Really an Evolved Capacity for Number? *Trends in Cognitive Sciences*, 21(6), 409-424. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tics.2017.03.005>

Office québécois de la langue française (1990). *Maturation*. <https://vitrinelinguistique.oqlf.gouv.qc.ca/fiche-gdt/fiche/17027772/maturation>

O'Rear, C. D., Kirkland, P. K., & Purpura, D. J. (2024). The how many and give-N tasks: Conceptually distinct measures of the cardinality principle. *Early Childhood Research Quarterly*, 66, 61-74. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2023.08.010>

O'Shaughnessy, D. M., Cordero, T. C., Mollica, F., Boni, I., Jara-Ettinger, J., Gibson, E., & Piantadosia, S. T. (2023). Diverse mathematical knowledge among indigenous Amazonians. *PNAS*, 120(35), e2215999120. <https://doi.org/10.1073/pnas.2215999120>

O'Shaughnessy, D. M., Gibson, E., & Piantadosi, S. (2022). The Cultural Origins of Symbolic Number. *Psychological Review*, 129(6), 1442-1456. <https://doi.org/10.1037/rev0000289>

Ouyang, X., Yang, Y., Zhang, X., & Zhang, Q. (2021). Longitudinal relations between the approximate number system and symbolic number skills in preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 212, 105254. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105254>

Paliwal, V., & Baroody, A. J. (2020). Cardinality principle understanding: the role of focusing on the subitizing ability. *ZDM*, 52, 649-661. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01150-0>

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. *Psychological Science*, 24(10), 2013-2019. <https://doi.org/10.1177/0956797613482944>

Piazza, M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E.S., & Dehaene, S. (2013). Education Enhances the Acuity of the Nonverbal Approximate Number System. *Psychological Science*, 24(6), 1037-1104. <https://doi.org/10.1177/0956797612464057>

- Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *Elementary School Journal*, 112(4), 627-648. <https://doi.org/10.1086/665009>
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2016). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (p. 1118-1134). Oxford University Press <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Robinson, K. M., Price, J. A. B., & Demyen, B. (2018). Understanding arithmetic concepts: Does operation matters? *Journal of Experimental Child Psychology*, 166, 421-436. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.09.003>
- Roussel, J. L., Fayol, M. & Barrouillet, P. (2002). Procedural vs. direct retrieval strategies in arithmetic: A comparison between additive and multiplicative problem solving. *European Journal of Cognitive Psychology*, 14, 61-104. <https://doi.org/10.1080/09541440042000115>
- Rousselle, L., & Noël, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: a comparison of symbolic versus non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, 102, 361-395. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005>
- Sarnecka, B. W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: what children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.05.007>
- Sarnecka, B. W., Goldman, M. C., & Slusser, E. B. (2015). How counting leads to children's first representations of exact, large numbers. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (p. 291-309). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.011>
- Sarnecka, B. W., & Lee, M. D. (2009). Levels of number knowledge during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(3), 325-37. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.02.007>
- Sarnecka, B. W., & Wright, C. E. (2013). The Idea of an Exact Number: Children's Understanding of Cardinality and Equinumerosity. *Cognitive Science*, 37, 1493-1506. <https://doi.org/10.1111/cogs.12043>
- Sato, M., & Lalain, M. (2008). On the relationship between handedness and hand-digit mapping in finger counting. *Cortex*, 44, 393-399. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.005>
- Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis. *Developmental Science*, 20(3), 1-16. <https://doi.org/10.1111/desc.12372>
- Schneider, R. M., Sullivan, J., Guo, K., & Barner, D. (2021). What counts? Sources of knowledge in children's acquisition of the successor function. *Child Development*, 92(4), e476-e492. <https://doi.org/10.1111/cdev.13524>

- Schneider, R. M., Pankonin, A., Schachner, A., & Barner, D. (2021). Starting small: exploring the origins of successor function knowledge. *Developmental Science*, 24, e130910. <https://www.doi.org/10.1111/desc.13091>
- Schwenk, C., Sasanguie, D., Kuhn, J.-T., Kempe, S., Doebler, P., & Holling, H. (2017). (Non)symbolic magnitude processing in children with mathematical difficulties: a meta-analysis. *Research in Developmental Disabilities*, 64, 152-167. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2017.03.003>
- Seron, X., & Fayol, M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology*, 12, 281-300. <https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1994.tb00635.x>
- Shanley, L., Clarke, B., Doabler, C. T., Kurtz Nelson, E., & Fien, H. (2017). Early number skills gains and mathematics achievement: Intervening to establish successful early mathematics trajectories. *Journal of Special Education*, 51(3), 177-188. <https://doi.org/10.1177/0022466917720455>
- Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and non-symbolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 101, 88-100. <https://doi.org/10.1037/a0013156>
- Silver, A. M., & Libertus, M. E. (2022). Environmental influences on mathematics performance in early childhood. *Nature Review Psychology*, 1(7), 407-418. <https://doi.org/10.1038/s44159-022-00061-z>
- Sixtus, E., Krause, F., Lindermann, O., & Fischer, M. H. (2023). A sensorimotor perspective on numerical cognition. *Trends in Cognitive Sciences*, 27(4). <https://doi.org/10.1016/j.tics.2023.01.002>
- Starkey, P., & Cooper, R. G. (1995). The development of subitizing in young children. *British Journal of Developmental Psychology*, 13(4), 399-420. <https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1995.tb00688.x>
- Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *PNAS*, 110(45), 18116-20. <https://doi.org/10.1073/pnas.1302751110>
- Stock, P., Desoete, A., & Roeyers, H. (2010). Detecting children with arithmetic disabilities from kindergarten: Evidence from a 3-year longitudinal study on the role of preparatory arithmetic abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 43(3), 250-268. <https://doi.org/10.1177/0022219409345011>
- Thevenot, C., Tazouti, Y., Billard, C., Dewi, J., & Fayol, M. (2023). Acquisition of new arithmetic skills based on prior arithmetic skills: A cross-sectional study in primary school from grade 2 to grade 5. *British Journal of Educational Psychology*, 93(3), <https://doi.org/10.1111/bjep.12588>

- Tokac, U., Novak, E., & Thompson, C. G. (2019), Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Computer Assisted Learning*. 1-14. <https://doi.org/10.1111/jcal.12347>
- Van Marle, C., Chu, F. W., Li, Y., & Geary, D. C. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers' quantitative development. *Developmental Science*, 17 (4), 492-505. <https://doi.org/10.1111/desc.12143>
- Van Nieuwenhoven, C. (1996). Le comptage et la cardinalité, deux apprentissages de longue haleine qui évoluent en interaction. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(2), 295-320. <https://doi.org/10.7202/031882ar>
- Viarouge, A. (2020). Le nombre et l'arithmétique. In N. Poirel, *Neurosciences cognitives développementales* (p. 160-193). De Boeck Supérieur. <https://doi-org.proxybib-pcnam.fr/10.3917/dbu.poire.2020.01.0160>
- Vilette, B. (1994). Des processus de quantification à la cardinalité. *L'année psychologique*, 94(1), 25-43. <https://doi.org/10.3406/psy.1994.28732>
- Vilette, B., Fischer, J., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., & Richard, J. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, 201, 105-120. <https://doi.org/10.4000/rfp.7296>
- Wang, J., Halberda, J., & Feigenson, L. (2021). Emergence of the Link Between the Approximate Number System and Symbolic Math Ability. *Child Development*, 92(2), 186-200. <https://doi.org/10.1111/cdev.13454>
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Young Children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, 17(1), 58-72. <https://doi.org/10.1007/BF03217409>
- What Works Clearinghouse (WWC) (s.d.). Publications. <https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Publication>
- Wong, T. T.-Y., & Chan, W. W. L. (2019). Identifying children with persistent low math achievement: The role of number-magnitude mapping and symbolic numerical processing. *Learning and Instruction*, 60, 29-40. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.11.006>
- Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, 25(2), 10-17.
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24(2), 220-251. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(92\)90008-P](https://doi.org/10.1016/0010-0285(92)90008-P)
- Xu, C., Li, H., Di Lonardo Burr, S., Si, J., LeFevre, J.-A., & Zhuo, X. (2024). We cannot ignore the signs: The development of equivalence and arithmetic for students from grades 3 to 4. *Journal of Cognition and Development*, 25(1), 46-65. <https://doi.org/10.1080/15248372.2023>



## CONFÉRENCE DES MINISTRES DE L'ÉDUCATION DES ÉTATS ET GOUVERNEMENTS DE LA FRANCOPHONIE

Complexe Sicap Point E - Immeuble C, 3e étage  
Avenue Cheikh Anta Diop - 3220 Dakar, Sénégal  
+221 33 859 29 79 - [confemen@confemen.org](mailto:confemen@confemen.org)  
[www.confemen.org](http://www.confemen.org)

le **cnam**  
Cnesco

Centre national d'étude des systèmes scolaires

## CENTRE NATIONAL D'ÉTUDE DES SYSTÈMES SCOLAIRES CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

41 rue Gay-Lussac - 75005 Paris, France  
+33 6 98 51 82 75 - [cnesco@lecnam.net](mailto:cnesco@lecnam.net)  
[www.cnesco.fr](http://www.cnesco.fr)

La Confemen et le Cnesco œuvrent pour l'amélioration des systèmes éducatifs. Grâce à l'appui financier de l'Agence française de développement (AFD) et en partenariat avec le ministère de l'Éducation nationale du Sénégal, la Confemen et le Cnesco ont conjugué leurs efforts pour organiser à Dakar une conférence de consensus sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire.

RETROUVEZ LES DERNIÈRES ACTUALITÉS DE LA CONFEMEN ET DU CNESCO :

